Verslagen van de Zittingen

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN DE

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN

van 25 Mei 1895 tot 18 April 1896.

DEEL IV.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1896.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN.

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 25 Mei 1895.

Voorzitter: de Heer H. G. van de Sande Bakhuyzen.
Secretaris: de Heer C. A. J. A. Oudemans.

Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. brief van Z. E. den Minister van Binnenlandsche Zaken (4 Mei 1895), met de kennisgeving, dat het H. M. de Koningin-Regentes behaagd heeft goed te keuren de benoemingen van de Heeren H. G. van de Sande Bakhuyzen en J. D. van der Waals, respectievelijk tot Voorzitter en Onder-Voorzitter, en verder van den Heer C. Lely tot gewoon Lid, van Lord Rayleigh tot buitenlandsch Lid en van den Heer C. Eykman tot Corrëspondent der Afdeeling;

2°. brief van denzelfden Minister (23 April 1895), waarin het verzoek wordt gedaan Z. E. te berichten, of er Nederlandsche ge-

leerden zijn, en zoo ja, welke, bereid, buiten bezwaar van 's Rijks schatkist, zich door de Regeering te doen afvaardigen naar het in de maand Augustus a. s. te Doornik, onder de leiding van de Société historique et littéraire de Tournai, door de Fédération archéologique et historique de Belgique te houden Congres.

De brief werd, met de bijlagen, bereids behandeld in de Afdeeling Letterkunde, maar zonder gunstigen uitslag. De vraag, door den Voorzitter der Natuurkundige Afdeeling thans tot de tegenwoordige Leden gericht: of er iemand geneigd ware, zich naar des Ministers wenschen te schikken, geeft geene betere uitkomst. Er wordt dus, op voorstel des Voorzitters besloten, den Minister te antwoorden, dat de Koninklijke Akademie van Wetenschappen niemand onder hare leden telt, die zich de benoeming van Regeerings-afgevaardigde naar het Congres te Doornik zou laten welgevallen.

3⁰. Brief van de Nederlandsche Dierkundige Vereeniging, waarin kennis wordt gegeven dat het derde internationale Zoölogisch Congres in September a. s. gehouden zal worden te Leiden onder voorzitterschap van Dr. F. A. Jentink. De Vereeniging zou er hoogen prijs op stellen, zoo de Akademie van hare belangstelling in het Congres zou willen doen blijken door de benoeming van een gedelegeerde.

De Voorzitter stelt voor, aan het verlangen der Vereeniging te voldoen. Hiertoe wordt besloten. Als gedelegeerde wordt door den Voorzitter aangewezen den Heer Hoffmann, hoogleeraar te Leiden, die de benoeming aanvaardt.

4⁰. Kennisgeving van den Heer Brutel de la Rivière, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

— Het nieuw benoemde lid, de Heer C. Lely, wordt ter vergadering binnengeleid en door den Voorzitter verwelkomd. Ook de Heer Treub, Directeur van 's Lands Plantentuin te Buitenzorg, met verlof in Nederland, wordt welkom geheeten bij zijn eerste bezoek der vergaderingen na eene afwezigheid van een achttal jaren.

Natuurkunde. — De Commissie voor de bliksemafleiders op 's Rijks Archiefgebouw te 's Hertogenbosch brengt, bij monde van den Heer Kamerlingh Onnes, een 2e verslag uit, naar aanleiding van de ontvangst der inlichtingen, welke zij in haar eerste verslag had aangevraagd.

De Commissie, benoemd om naar aanleiding van het schrijven van Z.Exc. den Minister van Binnenl. Zaken d.d⁰ 31 Oct. 1894, n⁰ 2274,

afd. K.W., te dienen van advies, heeft de eer U mede te deelen, dat zij de nadere gegevens, vervat in den brief van Z Exc. van 26 April l.l., n° 1009, K.W., heeft bestudeerd en daaruit heeft gezien, dat de gebrekkige toestand der bliksemafleiders op het Archiefgebouw te 's Hertogenbosch geheel te wijten is aan de gebrekkige verbinding van de kabels met de vangstangen. Ook de verbinding van de ijzeren kabels onderling laat, zooals de Heer Rijksbouwkundige opmerkt, te wenschen over. Eene genoegzame zekerheid schijnt ons de verbinding van ijzeren kabels slechts te kunnen opleveren, wanneer de deelen stevig zijn geklemd en het oppervlak van aanraking aanzienlijk en afdoende tegen inwerking van den dampkring beschermd is. Wat de uitzetting van het koper betreft, deze is grooter dan die van het ijzer; het krimpen en uitzetten der kabels zal dus bij vervanging van de ijzeren kabels door koperen niet verminderen. Het voordeel van koperen kabels boven ijzeren moet voor een groot deel gezocht worden in de gemakkelijke wijze, waarop gesoldeerde verbindingen kunnen worden aangebracht. Wij achten intusschen soldeeren niet noodzakelijk. De verbinding van ijzeren stangen en kabels door klemstukken, mits van behoorlijke afmetingen, stevig bevestigd en voldoende beschermd, mag, wat het afleiden van den bliksem betreft, op grond van de nieuwere onderzoekingen over snel verloopende stroomen, even deugdelijk geacht worden als die welke door soldeeren verkregen wordt. Wij kunnen dus niet adviseeren de ijzeren kabels thans reeds door koperen te vervangen. Het komt ons veeleer wenschelijk voor, dat door den Heer Rijksbouwkundige worde overwogen of klemverbindingen van genoegzame stevigheid en van genoegzaam aanrakend oppervlak, zijnde bijv. tienmaal de doorsnede van kabel of stang, ter plaatse zouden kunnen worden aangebracht ten einde op de minst kostbare wijze den gebrekkigen toestand te verbeteren.

Wanneer men de ijzeren kabels door koperen vervangt, komt dit inderdaad neer op een nieuwen aanleg, en, ingeval van een nieuwen aanleg, zou, met het oog op hetgeen in den laatsten tijd is bekend geworden, nog eens dienen te worden nagegaan, of de gebruikelijke koperen kabels ook thans nog het meest geschikt zijn te achten.

J. D. VAN DER WAALS.
H. A LORENTZ.
H. KAMERLINGH ONNES.

Het verslag wordt goedgekeurd, en zal aan den Minister van Binnenlandsche Zaken worden toegezonden.

Sterrenkunde. — De Heer J. C. KAPTEIJN spreekt: *„Over de verdeeling der Kosmische snelheden"*.

Wanneer de onderzoekingen omtrent den bouw des hemels tot nog toe niet tot zeer betrouwbare resultaten hebben gevoerd, zoo moet dit voor een goed deel daaraan worden geweten, dat men zich genoodzaakt heeft gezien steeds van een zeker getal hypothesen uitte gaan, die ten deele niet zeer waarschijnlijk, ten deele bepaald onjuist zijn.

Het is Spreker voorgekomen dat men met een klein getal aannemelijke hypothesen volstaan kan voor het afleiden uit de waarnemingen althans van eene eerste benadering der drie volgende wetten:

1°. De wet naar welke de volstrekte lineaire snelheden der sterren zijn verdeeld;

2°. De wet volgens welke de stersdichtheid verandert met den afstand tot de zon;

3°. De wet van de verdeeling der volstrekte helderheden.

Dat met de kennis dezer wetten reeds veel gewonnen is, is duidelijk.

Spreker heeft eenigszins meer in het bijzonder tot nog toe slechts de eerste wet bestudeerd en bij deze is hij nog op een praktisch bezwaar gestuit, dat hem weerhoudt van het geven van einduitkomsten. Toch schijnt hem de openbare bespreking van den gevolgden weg om meer dan een reden zeer gewenscht. Zeer in het kort zal hij daaraan toevoegen de wijze waarop, met behulp van die eerste wet, ook de twee andere wetten uit de waarnemingen kunnen worden afgeleid.

Bij de afleiding der eerste wet worden de drie volgende hypothesen ten grondslag gelegd:

a. In de richtingen in welke de bewegingen der vaste sterren plaats hebben, bestaat geen voorkeur voor eenige bepaalde richting;

b. De wet der snelheidsverdeeling verandert niet met den afstand der sterren tot ons zonnestelsel;

c. De functie, die de waarschijnlijkheid van het voorkomen van verschillende lineaire snelheden aangeeft, heeft slechts één maximum.

Wat de eerste hypothese betreft, van deze zal men zich bezwaarlijk ooit vrij kunnen maken, althans zoo lang men geene methodes gevonden heeft om jaarlijksche parallaxen van 0"01 en nog kleiner op groote schaal en met groote nauwkeurigheid te meten. Tot nog toe hebben alle onderzoekingen, welke zich ten doel stelden het

ontdekken eener systematische beweging van het melkwegstelsel, een negatief resultaat opgeleverd. Slechts een klein getal kleinere stelsels zijn bekend geworden, die eene gemeenschappelijke eigenbeweging vertoonen. De gewichtigste dezer groepen zijn wel de Hyaden en Pleiaden. Deze zijn om die reden bij het onderzoek in alle geval uittesluiten.

Wat de tweede hypothese betreft, deze schijnt misschien niet zoo geheel aannemelijk. Eene groote waarschijnlijkheid zou men haar allicht toekennen, wanneer kon aangetoond worden dat althans de *gemiddelde* lineaire snelheid der vaste sterren niet met den afstand verandert. De Heer Ristenpart heeft gevonden dat deze gemiddelde lineaire snelheid toeneemt met den afstand der sterren tot ons zonnestelsel. Zooals blijken zal, moet echter de methode van den Heer Ristenpart tot illusoire uitkomsten voeren, zoodat aan zijn resultaat geen gewicht mag worden gehecht. Een rechtstreeksch bewijs voor de juistheid der hypothese, althans binnen zekere grenzen voor den afstand, kan geleverd worden door de vergelijking van de gemiddelde lineaire snelheden der Bradley-sterren van den 2en typus met die van de overige spectraal-typen, die gemiddeld aanzienlijk (2 à 3 maal) verder van ons zonnestelsel staan [1]). In hetgeen volgt is deze vergelijking doorgevoerd en wordt slechts een gering verschil gevonden, in tegengestelden zin van hetgeen de Heer Ristenpart vindt. Overigens zal van de verandering der gemiddelde snelheden met den afstand, zoo die bestaat, moeten blijken, bij de afleiding der wet van de verdeeling der volstrekte helderheden [2]). Zoolang de numerische berekening daarvan nog niet is doorgevoerd, moge de snelheidswet beschouwd worden als eene wet, geldig voor den gemiddelden afstand der sterren waaruit ze is afgeleid.

Zij

r de afstand van eene willekeurige ster S (zie fig.) tot ons zonnestelsel. Als éénheid van afstand wordt aangenomen de afstand op welken de jaarlijksche beweging van het zonnestelsel, onder rechten hoek gezien, zich vertoont onder een hoek van 1″.

---

1) Vgl. ook Verslagen en Meded. 1893, blz. 139. Stelling XI.

2) Het meest rechtstreeksche en afdoende bewijs is wel in de toekomst te hopen van de nauwkeurige spectroscopische waarneming der snelheden in de gezichtslijn. Zoodra deze waarnemingen over eenige duizende sterren zullen zijn uitgebreid (wat met de hulpmiddelen van den tegenwoordigen tijd helaas nog niet goed mogelijk schijnt), zal men daaruit ook de wet zelf der snelheidsverdeeling op meer rechtstreeksche wijze kunnen afleiden dan vooralsnog mogelijk is met behulp der waargenomen hoekbeweging.

s de lineaire snelheid van S.

n de projectie daarvan op het vlak, loodrecht op de verbindingslijn met de zon.

ν de projectie van s op de lijn, die loodrecht staat op het vlak door ster, zon en zonsapex.

$\bar{s}$, $\bar{n}$, $\bar{\nu}$ het arithmetisch gemiddelde respectieve van alle s, n, ν.

f (s) de waarschijnlijkheid dat de lineaire eigenbeweging van een ster heeft de waarde s.

F (n) de waarschijnlijkheid dat de projectie der lineaire eigenbeweging op een bepaald vlak heeft de waarde n;

Ω (ν) de waarschijnlijkheid dat de projectie der lineaire eigenbeweging op eene bepaalde lijn heeft de waarde ν.

μ de totale hoek eigenbeweging.

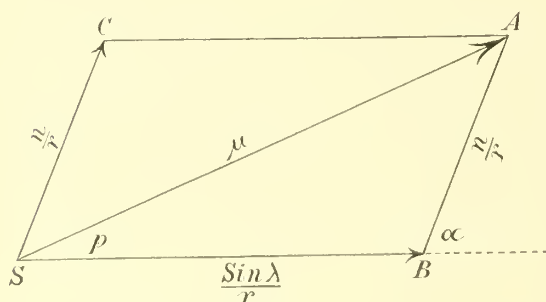
σ de projectie van μ op den grooten cirkel SB (zie fig.) door ster en Antiapex (— genomen als σ gericht is naar Apex).

τ de projectie van μ op een grooten cirkel, loodrecht op den vorigen (altijd + gerekend).

p de hoek die μ maakt met den grooten cirkel SB (zie fig.)

α de hoek die n maakt met den grooten cirkel SB.

λ hoekafstand ster tot Apex.



Als de ster S (zie fig.) werkelijk in rust was, zou zij, ten gevolge van de zonsbeweging, schijnen te bezitten de hoekbeweging $SB = \frac{\sin\lambda}{r}$ in de richting naar het Antiapex. Ware daarentegen de zon in rust en de ster in beweging, zoo zou die beweging worden waargenomen als eene hoek-eigenbeweging $SC = \frac{n}{r}$, waarin n de boven aangegeven beteekenis heeft. $\frac{\text{Sin}\,\lambda}{r}$ is de parallactische; $\frac{n}{r}$ de peculiaire eigenbeweging. De in werkelijkheid waargenomen eigenbeweging μ is de resultante dezer twee.

Uit de figuur volgt aanstonds

$$n \sin(\alpha - p) = \sin\lambda \sin p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

uit welke vergelijking blijkt dat de hoek p, die de eigenbeweging

maakt met den grooten cirkel naar het Antiapex, *onafhankelijk is van den afstand.* Worden de sterren, met behoud van de richting en grootte harer lineaire snelheden, willekeurig in de gezichtslijn verplaatst (b. v. alle in éénzelfde boloppervlak gebracht), zoo verandert daardoor niets in de hoeken p, die hunne schijnbare eigenbewegingen maken met den grooten cirkel SB.

Van deze eigenschap kan men gebruik maken om de wet der lineaire eigenbewegingen te leeren kennen. Immers, het blijkt daaruit gemakkelijk dat, als voldaan is aan de boven gestelde hypothesen a en b, de verdeeling der p over de hoeken 0° tot 180° [1]) alleen afhangt van de waarde van λ en van $F(n)$, en uit de waargenomen verdeeling der p moet zich derhalve $F(n)$ laten afleiden.

Zij, om deze afhankelijkheid in eene vergelijking uit te drukken, W_o^b de uit de waarnemingen getrokken waarschijnlijkheid dat p ligt tusschen 0° en b°. Men vindt als $b \leqq \frac{\pi}{2}$

$$W_o^b = D + G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$W_{\pi-b}^{\pi} = \quad G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin

$$D = \frac{2 \sin \lambda}{\pi} \int_o^b \cos p \, dp \int_{\sin \lambda \, \sin p}^{\infty} \frac{F(n) \, dn}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \lambda \, \sin^2 p}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$G = -\frac{\sin \lambda}{\pi} \int_o^b \cos p \, dp \int_{\sin \lambda}^{\infty} \frac{F(n) \, dn}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \lambda \, \sin^2 p}} + \frac{b}{\pi} \int_{\sin \lambda}^{\infty} F(n) \, dn \quad . \quad (5)$$

en $F(n)$ gebonden is aan de voorwaarde

$$\int_o^{\infty} F(n) \, dn = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

De waarschijnlijkheid W_a^b dat p ligt tusschen twee willekeurige grenzen a en b, laat zich hieruit terstond afleiden.

Van deze formules zou men kunnen gebruik maken om $F(n)$ te vinden. Immers, de waarden W_a^b zijn door de waarneming gegeven voor willekeurige a en b en voor verschillende waarden van $\sin \lambda$. Intusschen wordt niet eigenlijk gezocht $F(n)$ maar $f(s)$. Het is

---

[1]) Van 0° tot −180° is klaarblijkelijk de verdeeling symmetrisch met die van 0° tot + 180°. Men zal de eersten dus met de laatsten vereenigen zonder op het teeken te letten.

zelfs niet zaak om eerst $F(n)$ op te sporen en daaruit dan $f(s)$ af te leiden, omdat met elken vorm van $F(n)$ *niet* eene mogelijke oplossing voor $f(s)$ overeenkomt. — Het is dus beter den omgekeerden weg te volgen en rechtstreeks $f(s)$ uit de waarnemingen te bepalen. Het komt er derhalve op aan $F(n)$ uit te drukken in $f(s)$. Ook deze quaestie lost men zonder bezwaar op door gebruik te maken van hypothese a. Er komt

$$F(n) = n \int_n^\infty \frac{f(s)\, ds}{s\sqrt{s^2 - n^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarmede de formules (4) en (5) worden

$$D = \frac{2 \sin \lambda}{\pi} \int_o^b \cos p\, dp \int_{\sin\lambda \sin p}^\infty \frac{n\, dn}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \lambda \sin^2 p}} \int_n^\infty \frac{f(s)\, ds}{s\sqrt{s^2 - n^2}} \quad . \quad (8)$$

$$G = -\frac{\sin \lambda}{\pi} \int_o^b \cos p\, dp \int_{\sin\lambda}^\infty \frac{n\, dn}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \lambda \sin^2 p}} \int_n^\infty \frac{f(s)\, ds}{s\sqrt{s^2 - n^2}} +$$

$$+ \frac{b}{\pi} \int_{\sin\lambda}^\infty n\, dn \int_{\sin\lambda}^\infty \frac{f(s)\, ds}{s\sqrt{s^2 - n^2}} \quad . \quad (9)$$

Door eene vernuftige methode, welke spreker aan zijnen broeder W. Kapteijn dankt, laten de drievoudige integralen zich tot de volgende enkele herleiden :

$$D = \sin b \sin \lambda \int_{\sin b \sin \lambda}^\infty \frac{f(s)}{s}\, ds + \int_o^{\sin b \sin \lambda} f(s)\, ds \quad . \quad . \quad (10)$$

$$G = \frac{1}{\pi} \int_{\sin\lambda}^\infty f(s) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{s^2 - \sin^2 \lambda}}{s \operatorname{cotg} b}\, ds -$$

$$- \frac{\sin \lambda \sin b}{\pi} \int_{\sin\lambda}^\infty \frac{f(s)}{s} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{s^2 - \sin^2 \lambda}}{\sin \lambda \cos b}\, ds \quad . \quad (11)$$

Aan deze formules mogen nog de volgende toegevoegd worden, welke voor het meerendeel in het volgende noodig zullen blijken :

$$\Omega(\nu) = \frac{2}{\pi} \int_\nu^\infty \frac{F(n)\, dn}{\sqrt{n^2 - \nu^2}} = \int_\nu^\infty \frac{f(s)}{s}\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$W_o^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \int_{\sin\lambda}^\infty \frac{s - \sin \lambda}{s} f(s)\, ds . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$W_{\frac{\pi}{2}} = \int_{\sin\lambda}^{\infty} \frac{s - \sin\lambda}{s} f(s)\, ds \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

$$W_{o}^{b} - W_{\pi - b}^{\pi} = D = \text{zuivere functie van } \sin\lambda \sin b \quad (15)$$

$$\bar{s} = \int_{o}^{\infty} s\, f(s)\, ds \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

$$\bar{n} = \int_{o}^{\infty} n\, F(n)\, dn = \frac{\pi}{4} \int_{o}^{\infty} s\, f(s)\, ds = \frac{\pi}{4} \bar{s} \; . \; . \quad (17)$$

$$\bar{\nu} = \int_{o}^{\infty} \nu\, \Omega(\nu)\, d\nu = \frac{2}{\pi} \int_{o}^{\infty} n\, F(n)\, dn = \frac{1}{2} \int_{o}^{\infty} s\, f(s)\, ds = \frac{2}{\pi} \bar{n} = \frac{1}{2} \bar{s} \; . \quad (18)$$

De hier gegeven formules (2) en (3) zullen nu voeren tot eene bepaling van $f(s)$. Deze afleiding, het laat zich gemakkelijk doorzien, zal echter niet met eenige benadering kunnen geschieden zonder eene hypothese als de boven sub *c* opgestelde. — Echter, ook al neemt men die aan, zoo blijft het wenschelijk, de bepaling zoo mogelijk te versterken door althans ook eenig gebruik te maken van de *grootte* der eigenbeweging. Spreker toont aan, dat de *gemiddelde* lineaire eigenbeweging $\bar{n}$ zich onafhankelijk van eenige hypothese over de afstanden laat afleiden en geeft voor de berekening aan de formule:

$$\bar{n} = \int_{o}^{\infty} n\, F(n)\, dn = \frac{\pi}{2} (\sin\lambda)_{\text{gem}} \frac{\Sigma\tau}{\Sigma\sigma} \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

in welke $(\sin.\ \lambda)_{\text{gem}}$ aangeeft het arithmetisch midden der waarden van sin. λ voor de gebruikte sterren.

Hij wijst op de omstandigheid dat op de uitkomst, die van deze vergelijking te verwachten is, de weinige sterren met zeer groote eigenbeweging een sterk overwegenden invloed uitoefenen. Sommige sterrekundigen, als bijv. STUMPE en RISTENPART, hebben de sterren gegroepeerd naar de grootte harer totaal-eigenbeweging en hebben dan $\bar{n}$ uit elk der groepen afzonderlijk berekend. Op deze wijze wordt wel het genoemde bezwaar vermeden, maar de resultaten, waartoe men gevoerd wordt, zijn geheel illusoir. RISTENPART komt uit eene dergelijke samenstelling tot het besluit, dat de waarde van $\bar{n}$ toeneemt met den afstand tot het zonnestelsel. Spreker toont aan, dat men geen recht heeft uit RISTENPART's uitkomsten deze conclusie te trekken; zijne methode moet ook dan nog tot dezelfde

2

slotsom voeren, als inderdaad de gemiddelde lineaire snelheden der sterren gelijk zijn bij verschillenden afstand tot de zon [1]).

Om nochtans van de *grootte* der *E.B.* een nuttiger gebruik te

---

[1]) Het volgende kan dienen om het illusoire van conclusies als de boven besprokene te doen uitkomen door andere, geheel analoge redeneeringen. Naarmate de snelheid der sterren minder aanzienlijk is, in verhouding tot die van de zon, zullen de richtingen der totaal-eigenbewegingen meer samengedrongen zijn naar de richting van het Antiapex. — Verder zullen ongetwijfeld de sterren, wier totaal-eigenbeweging μ, of wier eigenbewegingscomponente τ klein is, in het algemeen verder af staan dan de sterren voor welke deze grootheden een aanzienlijker bedrag hebben.

Vindt men dus dat de *E.B.* der sterren met kleine μ of τ minder gedrongen zijn naar de richting van het Antiapex, zoo zal men, redeneerende als RISTENPART, besluiten dat de lineaire *E.B.* der verwijderde sterren grooter is dan die der naderbij staande sterren. Spr. vindt nu voor de volledig door BRADLEY waargenomen sterren de volgende verdeeling der positiehoeken *p*.

I. $\dfrac{\text{Aantal hoeken } p\ 0^0\text{—}90^0}{\text{totaal aantal}}$

μ	sin λ = 0.90—1.00.	aantal sterren.
0″.00—0″.02	0.57	255
.03— .05	0.71	359
.06— .09	0.75^5	244
.10— .19	0.88	98
.20— en hooger	0.95	68

II. $\dfrac{\text{Aantal hoeken } p\ 0^0\text{—}90^0}{\text{totaal aantal}}$

τ	sin λ = 0.80—1.00.	aantal.	sin = λ 0.50—0.79.	aantal.
0″.00—0″.02	0.74	869	0.67	329
.03— .05	0.71^5	421	0.68	133
.06— .09	0.76	192	0.67	60
.10— .19	0.81	145	0.71	55
.20 en hooger	0.79	89	0.69	32

III. $\dfrac{\text{Aantal hoeken } p\ 0^0\text{—}49^0}{\text{totaal aantal}}$ $\dfrac{\text{Aantal hoeken } p\ 0^0\text{—}59^0}{\text{totaal aantal.}}$

τ	sin λ = 0.80—1.00.	aantal.	sin λ = 0.50—0.79.	aantal.
0″00—0″02	0.60	869	0.53^5	329
.03— .05	0.46	421	0.43	133
.06— .09	0.46	192	0.43	60
.10— .19	0.53	145	0.34^5	55
.20 en hooger	0.40^5	89	0.34	32

Uit het eerste tafeltje zou men naar de besproken redeneering het besluit trekken dat de snelheid sterk toeneemt met den afstand; uit het tweede dat die toename zwak is; uit het laatste dat integendeel de snelheid afneemt met den afstand. — Inderdaad echter is het niet moeilijk aan te toonen dat, zoo de gemiddelde snelheid constant is, de gang in elk der tafeltjes juist in dien zin moet zijn als die hier wordt gevonden.

kunnen maken dan door rechtstreeksche toepassing van de vergelijking (19), heeft Spreker twee verschillende wegen ingeslagen: De 1^e *methode* berust op het volgende: Laat de sterren naar een of anderen regel in groepen verdeeld zijn, waarvan de eerste *E.B.* bevat, die gemiddeld kleiner zijn dan die in de tweede, welke op hare beurt kleiner zijn dan die in de derde, enz. en noemen we kortheidshalve A_1, A_2, A_3 . . . . de waarde van $\frac{\pi}{2}$ (sin $\lambda)_{gem.}$ Σ τ resp. in de 1^e, 2^e, 3^e . . . groep; evenzoo B_1, B_2, B_3 . . . de waarde van Σ σ in deze groepen, zoo zullen de afzonderlijke waarden

$$\frac{A_1}{B_1} \quad \frac{A_2}{B_2} \quad \frac{A_3}{B_3} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (20)$$

voor $\bar{n}$, in de verschillende groepen gevonden, in het algemeen één gang vertoonen en het eenig betrouwbaar resultaat, daaruit te trekken, zal naar (19) zijn

$$\bar{n} = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \ . \ . \ . \ .}{B_1 + B_2 + B_3 + \ . \ . \ . \ .} \quad . \ . \ . \ . \qquad (21)$$

Gelukt het echter een beginsel van indeeling in groepen te vinden, waarbij de gang in de resultaten verdwijnt, zoo zal elk der afzonderlijke waarden (20) als eene bepaling van $\bar{n}$ kunnen worden opgevat, en men kan deze dan tot een einduitkomst vereenigen op zoodanige wijze, dat aan de grootere *E.B.* een veel minder overwegend gewicht wordt toegekend dan opgesloten ligt in de verbinding tot de einduitkomst (21).

Een dergelijke groepeering werd verkregen op de volgende wijze: Eerst werden de sterren, wier p ligt tusschen 0° en ± 9°, in tien groepen verdeeld, waarvan elk een gelijk (of althans zoo gelijk mogelijk) getal sterren bevat; de eerste de sterren met de allerkleinste totaal *E.B*; de tweede de naast grootere enz. tot de 10e klasse toe, in welke de allergrootste *E.B.* vereenigd zijn. Hetzelfde werd gedaan met de sterren, wier p ligt tusschen ± 10° en ± 19°; dan met die tusschen ± 20° tot ± 29° enz., tot die wier p ligt tusschen ± 170° tot ± 180° toe. Daarna werden al de groepen met de allerkleinste *E.B.* bijeengevoegd; evenzoo die met de naast grootere en zoo vervolgens.

Op die wijze werden *tien* groote groepen verkregen, elk met zeer nabij evenveel sterren, wier *E.B.* numeriek op dezelfde wijze over de verschillende hoeken p verdeeld zijn. In elke groep zijn sterren

met eenigszins, maar toch niet sterk uiteenloopende *E.B.* vereenigd. De uitkomst leert dat men zoodoende een reeks waarden voor $\bar{n}$ verkrijgt, die weinig of geen gang vertoonen. Dit blijkt uit het volgende overzicht:

	Typus II.					Overige Sterren.				
	Aantal.	Gemidd. *Sin* λ.	Σ τ	Σ σ	n̄	Aantal.	Gemidd. *Sin.* λ	Σ τ	Σ σ	n̄
I	103	0.775	0″95	+ 0″85	1.37	139	0.751	1″10	+ 0″82	1.58
II	103	0.792	1.55	+ 1.48	1.30	140	0.768	1.58	+ 1.38	1.38
III	104	0 834	2.29	+ 1.89	1.59	139	0.797	1.93	+ 1.70	1.42
IV	103	0.822	3.21	+ 2.77	1.50	139	0.781	2.42	+ 2.26	1.31
V	103	0.840	3.97	+ 3.86	1.36	139	0.777	3.02	+ 2.62	1.41
VI	103	0.805	5.41	+ 4 75	1.44	140	0.818	3.77	+ 3.19	1.52
VII	103	0.820	7.81	+ 6.63	1.52	139	0.815	4.75	+ 4.23	1.44
VIII	103	0.848	10.76	+ 8.81	1.62	140	0.802	5.86	+ 5.29	1.40
IX	103	0.846	16.25	+12.79	1.69	139	0.819	8.35	+ 7.48	1.43
X	105	0.776	43.71	+34.53	1.55	140	0.812	17.09	+15.64	1.40
Totaal	1033	0.816	95.91	+78.36	1.494	1394	0.794	49.87	+44.61	1.429

In beide samenstellingen zijn alleen uitgesloten 1°. de Hyaden, 2°. de Pleiaden en 3°. alle totaal *E.B.* 0″00 en de helft der totaal *E.B.* 0″01. Het aantal van deze laatsten is betrekkelijk gering.

Naar formule (17) volgt uit de gevonden waarden voor $\bar{n}$

$$\bar{s} = 1.902 \text{ resp. } \bar{s} = 1.820\,;\ \text{Gemidd. } \bar{s} = 1.86 \pm 0.02.$$

Het is echter niet te ontkennen dat tegen deze methode wel eenig, zooal geen overwegend, bezwaar kan blijven bestaan. De voorkeur verdient daarom, niettegenstaande hare grootere omslachtigheid, misschien de

2e *methode.* Deze berust op het feit dat in de waarde van quotiënten als

$$\frac{\Sigma \sqrt{\sigma}}{\Sigma \sqrt{\tau}} \qquad \frac{\Sigma \sqrt[3]{\sigma}}{\Sigma \sqrt[3]{\tau}}$$

de invloed der zeer groote *E.B.* tegenover die der kleine lang niet in die mate overwegend is als bij het quotient $\frac{\Sigma\,\sigma}{\Sigma\,\tau}$.

Toch kan men ook voor die quotiënten waarden aangeven, waarin de afstanden geheel geëlimineerd zijn. Hierbij is aangenomen dat men, zoodra σ negatief wordt, voor $\sqrt{\sigma}$ in de plaats stelt òf $-\sqrt{-\sigma}$ òf $+\sqrt{-\sigma}$. In het eerste geval vindt men b. v.

$$\frac{\Sigma\sqrt{\sigma}}{\Sigma\sqrt{\tau}} = \frac{(1-\varepsilon)\sqrt{\sin\lambda}\int_o^{\sin\lambda} F(n)\,dn + A\sin\lambda\left[\int_{\sin\lambda}^{\infty}\frac{F(n)}{\sqrt{n}}\,dn + \theta\right]}{B\int_o^{\infty}\sqrt{n}\,F(n)\,dn} \qquad (22)$$

waarin

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{a_1}{\sin^2\lambda}\int_o^{\sin\lambda} n^2 F(n)\,dn + \frac{a_2}{\sin^4\lambda}\int_o^{\sin\lambda} n^4 F(n)\,dn + \\ &\qquad + \frac{a_3}{\sin^6\lambda}\int_o^{\sin\lambda} n^6 F(n)\,dn + \ldots \\ \theta &= \left[b_1\sin^2\lambda\int_{\sin\lambda}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{5/2}}\,dn + b_2\sin^4\lambda\int_{\sin\lambda}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{9/2}}\,dn + ..\right]\int_{\sin\lambda}^{\infty} F(n)\,dn \end{aligned}\right\} . \qquad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + ..\right] = 0.83463 \\ B &= \frac{1}{\pi}\int_o^{\pi}\sqrt{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 0.76276 \end{aligned}\right\} . \qquad (24)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2^4} && = 0.06250 \\ a_2 &= \frac{1}{2^8}\cdot\frac{3.5}{2^2} && = 0.01465 \\ a_3 &= \frac{1}{2^{12}}\cdot\frac{3.5.7.9}{2^2.3^2} && = 0.00641 \\ a_4 &= \frac{1}{2^{16}}\cdot\frac{3.5.7.9.11.13}{2^2 3^2 4^2} && = 0.00358 \end{aligned}\right\} . \qquad (25)$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{A\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1.2.3}\left[\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{2.1}{2^2} + \left(\frac{1.3.5}{4.6}\right)^2 \frac{3.2}{2^3} + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \frac{4.3}{2^4} + \ldots\right] = 0.04168 \\
b_2 &= \frac{1}{A\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1.2.3.4.5}\left[\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \frac{4.3.2.1}{2^4} + \right. \\
&+ \left(\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\right)^2 \cdot \frac{5.4.3.2}{2^5} + \left(\frac{1.3.5.7.9\,.11}{2.4.6.8\,10.12}\right)^2 \cdot \frac{6.5\,4.3}{2^4} + \left. \ldots\right] = \\
&\qquad = 0.01282
\end{aligned}\right\} . \quad (26)$$

. . . .

Eene eerste benadering voor $F\ (n)$ zal voldoende zijn om de waarden van de correctietermen ε en θ met geheel bevredigende nauwkeurigheid te berekenen, en men heeft dus in (22) praktisch eene betrekking tusschen de gemiddelde waarde van $\sqrt{n}$, de gemiddelde waarde van $\frac{1}{\sqrt{n}}$ voor de sterren wier $n > \text{Sin}\,\lambda$, en de waarschijnlijkheid dat de waarde van n is $< \text{Sin}\,\lambda$.

Men kan aan de vorige formules toevoegen de volgende, die bijzonder eenvoudig is.

$$(n^2)_{\text{gem}} = \frac{2\,\Sigma\tau^2}{\Sigma\sigma^2 - \Sigma\tau^2}\,(\sin^2\lambda)_{\text{gem}} = \frac{2\,\Sigma\tau^2}{\Sigma\mu 2 - 2\Sigma\tau^2}\,(\sin^2\lambda)_{\text{gem}} \quad . \quad (27)$$

Wel is waar zullen hier, bij eene rechtstreeksche toepassing op het geheel der sterren, de zeer groote *E.B.* een nog overwegender rol spelen dan bij formule (19), maar als aan dit bezwaar op voldoende wijze kan worden te gemoet gekomen door eene groepverdeeling als boven werd aangegeven, zoo zal ook deze formule eene goede bijdrage kunnen leveren bij de bepaling van $F\ (n)$ of $f\ (s)$.

Spreker geeft nu in het kort aan hoe men, zoodra eenmaal $f\ (s)$ is verkregen, vindt allereerst $\Delta_r{}^m$, het aantal sterren van de schijnbare grootte m, op afstand r van het zonnestelsel, per volumen eenheid Daartoe denke men zich een kegel, welks top ligt in de zon en die uit het oppervlak van een bol, met de eenheid als straal om de zon beschreven, snijdt een oppervlak ω.

De inhoud van het volumen-element, besloten tusschen den mantel van dezen kegel en twee bolopppervlakken met de stralen r en $r + dr$ om de zon beschreven, zal dan zijn $r^2\,\omega\,dr$ en bevatten $\Delta_r{}^m\, r^2\,\omega\,dr$ sterren van de schijnbare grootte m. Onder deze sterren zijn er

$$\Delta_r{}^m\, \Omega\,(v)\, r^2\,\omega\,dr$$

wier lineaire *E.B.*, geprojecteerd op de lijn door de ster, loodrecht op het vlak door ster, zon en Apex, het bedrag ν heeft. De hoek *E.B.*τ dezer sterren, loodrecht op den grooten cirkel door Apex, is $\tau = \frac{\nu}{r}$.

Noemt men derhalve

N_τ^m het totaal aantal sterren van de schijnbare grootte m, wier hoek *E.B.* loodrecht op den grooten cirkel door Apex $= \tau$ is, en die liggen binnen den kegel met opening ω, zoo is

$$N_\tau^m = \omega \int_0^\infty \Delta_r^m \, \Omega\,(r\,\tau)\, r^2\, dr$$

of wel naar form. (12)

$$N_\tau^m = \omega \int_0^\infty \Delta_r^m \, r^2\, dr \int_{r\tau}^\infty \frac{f(s)}{s}\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Voor den geheelen hemel is $\omega = 4\,\pi$.

Men kent in deze vergelijking door de waarneming N_τ^m voor een reeks van waarden van τ en van m. Zij zal dus, binnen bepaalde grenzen, Δ leeren kennen als functie van r en m.

Men zal derhalve een tableau als het volgende kunnen uitschrijven:

Aantal sterren per volumen-eenheid.

Schijnb. grootte	$r = a$	$r = b$	$r = c$	.
3	Δ_a^3	Δ_b^3	Δ_c^3	.
4	Δ_a^4	Δ_b^4	Δ_c^4	.
5	Δ_a^5	Δ_b^5	Δ_c^5	.
6	. .	. .	. .	.
7	. .	. .	. .	.
8	. .	. .	. .	.
9	Δ_a^9	Δ_b^9	Δ_c^9	.

Noemt men nu verder:

M de absolute grootte van eene ster, waarvoor hier wordt aangenomen de schijnbare grootte, die deze ster zou vertoonen, als haar afstand tot de zon gelijk aan de eenheid was,

$$\delta = \log \frac{\text{helderheid ster van de grootte } m}{\text{helderheid ster van de grootte } m+1}$$

$$\frac{2}{\delta} = g \qquad \text{zoo is}$$

$$M = m - g \log r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

en het vorige tableau verandert in het volgende:

Aantal sterren per volumen eenheid.

$r = a$		$r = b$		$r = c$	
absolute *mag.*	aantal	absolute *mag.*	aantal	absolute *mag.*	aantal
$3 - g \log a$	Δ_a^3	$3 - g \log b$	Δ_b^3	$3 - g \log c$	Δ_c^3
$4 - g \log a$	Δ_a^4	$4 - g \log b$	Δ_b^4	$4 - g \log c$	Δ_c^4
$5 - g \log a$	Δ_a^5	$5 - g \log b$	Δ_b^5	$5 - g \log c$	Δ_c^5
. .	. .	. .	. .	. .	. .
. .	. .	. .	. .	. .	. .
. .	. .	. .	. .	. .	. .
$9 - g \log a$	Δ_a^9	$9 - g \log b$	Δ_b^9	$9 - g \log c$	Δ_c^9

Vergelijkt men nu in de verschillende kolommen de waarden van Δ, behoorende bij gelijke absolute grootten, zoo verkrijgt men de wet, volgens welke de dichtheid der sterren van gelijke absolute helderheid verandert met den afstand. Blijkt het daarbij dat die wet voor alle absolute grootten dezelfde is, zoo kan men de betrekkelijke dichtheid der sterren op verschillenden afstand, tot uitdrukking brengen, door de dichtheid van die eener willekeurige, maar bepaalde absolute grootte, b.v. door die der sterren van de absolute grootte M = o, d. i. door eene vergelijking als

$$(\Delta)_{M = o} = \varphi\ (r)$$

Deelt men dan in de verschillende kolommen de waarden van Δ door de bij den correspondeerenden afstand behoorende $(\Delta)_{M = o}$, zoo verkrijgt men eene reeks van getallen, die de verhouding aangeven van het aantal sterren van verschillende absolute grootte tot dat van de sterren wier absolute grootte gelijk nul is, en dat wel voor eene aanzienlijke reeks van waarden der absolute grootte. Hiermêe is dan ook de wet der verdeeling van de absolute grootten gevonden.

Geeft daarentegen het tableau het resultaat dat de dichtheid voor alle absoluten grootten niet op dezelfde wijze varieert, zoo volgt daaruit nog niet met zekerheid dat ook werkelijk de dichtheidswet veranderlijk is. Immers, de oorzaak van dit verschijnsel kan gelegen zijn in het aannemen van de hypothese *b*.

Men zal deze dan in zooverre loslaten dat men de gemiddelde waarde $\bar{s}$ van s een weinig met r veranderlijk neemt. Op deze wijze zal moeten blijken hoe groote veranderingen in $\bar{s}$ nog aannemelijk zijn.

Voor de afleiding naar de voorgaande formules van de snelheids-

wet uit de waarnemingen, zijn nu door Spr. omvangrijke berekeningen gemaakt, waaruit ook vormen voor f (s) zijn afgeleid, die hij echter niet aanstonds wenscht mede te deelen omdat, zooals reeds boven werd gezegd, een twijfel is overgebleven, die het gevolg is van eene eigenaardige verdeeling der *E. B.* aan een bepaald deel van den hemel. De *E. B.*, welke aan deze rekeningen zijn ten gronslag gelegd, zijn die van de sterren, die door Bradley in beide coördinaten zijn waargenomen; zij zijn herleid op de praecessie-constante van L. Struve en voor de positie van het Apex werd aangenomen:

$$\alpha\ 1875 = 270^\circ \quad \delta\ 1875 = +34^\circ.$$

Van de met deze gegevens berekende *E. B.* vertoonen nu een afwijkend karakter die, welke toekomen aan de sterren gelegen tusschen de galaktische breedten — 40° en — 90° en voor welke de waarde van sin λ begrepen is tusschen 0.90 en 1.00.

Zooals uit het volgende overzicht blijkt, is hier, terwijl bij de positieve waarden van p niets abnormaals is op te merken, het aantal waarden van p tusschen — 90° en — 180° grooter dan dat tusschen 0° en — 90°, wat zou wijzen op eene beweging van ons zonnestelsel naar het Antiapex in plaats van naar het Apex. Het feit dat dit verschijnsel optreedt afzonderlijk bij de sterren van den 1en typus, van den 2en typus en bij die wier typus onbekend is, geeft daaraan nog grooter gewicht.

Groep A. Aantallen Sterren.

p	Typus I.		Typus II.		Typus onbekend.		Totaal.	
0 tot + 29°	14		20		11		45	
+ 30 „ + 59	29	57	35	65	5	25	69	147
+ 60 „ + 89	14		10		9		33	
+ 90 „ + 119	4		10		3		17	
+ 120 „ + 149	8	16	10	23	8	13	26	52
+ 150 „ + 180	4		3		2		9	
— 1 „ — 29	10		6		4		20	
— 30 „ — 59	2	13	6	29	7	13	15	55
— 60 „ — 89	1		17		2		20	
— 90 „ — 119	4		15		10		29	
— 120 „ — 149	6	14	14	36	5	21	25	71
— 150 „ — 180	4		7		6		17	

Kleine veranderingen in de positie van het Apex en in de praecessie-constante kunnen deze verdeeling der positiehoeken niet veel gunstiger maken. Het schijnt dringend noodig dat de *E. B.* van een zoo groot mogelijk getal sterren uit deze streek van den hemel, ook met behulp van andere bronnen dan den catalogus van Bradley, worden onderzocht.

Eerst wanneer dit geschied is, zal een tamelijk afdoend resultaat voor de snelheids-verdeeling mogen worden verwacht.

Physiologie. — De Heer Engelmann handelt: „*over reciproke en irreciproke geleiding van prikkels in spiervezels, met het oog op de theorie der hartsbeweging*".

Terwijl onder normale voorwaarden de prikkel tot contractie zich in het hart even gemakkelijk van de kamer naar de voorkamer als omgekeerd voortplant, komen er, vooral bij het afsterven en onder invloed van vergiftiging, gevallen voor, waarin het geleidingsvermogen in de eene richting opgeheven, in de andere behouden is, of waar althans de geleidingssnelheid in beide richtingen belangrijk verschilt. Dan eens is de peristaltische, dan eens is de anti-peristaltische geleiding beter.

Men heeft van dit verschijnsel noch op grond der oude, noch op grond der nieuwe, door spreker verdedigde theorie der hartswerking, eene verklaring kunnen geven. Berust de voortplanting der irritatie door het hart, zooals spreker met Gaskell e.a. meent, uitsluitend op spiergeleiding, dan ligt het bezwaar daarin, dat volgens alle tot dusver bekende feiten de geleiding in spieren (evenals in zenuwen) in beide richtingen steeds even gemakkelijk gaat.

Dit bezwaar nu meent spreker te kunnen opheffen, door uit te gaan van het feit, dat het irritatieproces en de prikkelbaarheid in de verschillende deelen der geleidende spiermassa van het hart feitelijk niet dezelfde zijn. De voorkamervezels verschillen morphologisch en physiologisch van de kamervezels en beiden van de verbindende „blokvezels" tusschen voorkamer en kamer.

Slechts wanneer de geleidende deeltjes overal langs de baan dezelfde zijn en dus ook het physiologisch proces, dat zich als prikkel voortplant, in de op elkander werkende deeltjes kwalitatief en kwantitatief identisch is, zal de prikkel steeds even gemakkelijk van het eene deeltje naar het andere, als omgekeerd moeten kunnen voortschrijden.

Anders, waar, zooals aan de grens van kamer en voorkamer, drie soorten van spierelementen van verschillende eigenschappen met elkander in aanraking zijn.

Hier heeft men, hoewel in de norm in zeer veel geringere mate, met denzelfden toestand te doen als aan de grens van spier- en zenuwvezel, of bij het contact van de eindboompjes van een cellulifugalen zenuwuitlooper met de dendriten, of het lichaam eener gangliëncel. In de laatste gevallen bestaat reeds normaal irreciproke geleiding. In het hart ontwikkelt deze zich uit de normale reciproke geleiding eerst wanneer, bij het afsterven of onder de inwerking van zekere uitwendige agentia, de aanvankelijke verschillen grooter worden. Dat het laatste werkelijk het geval is, staat vast, getuige o. a. het feit van het langer voortbestaan van de „spontane” kloppingen en van de prikkelbaarheid van de voorkamer, vergeleken met die der kamer.

Aangezien ook de spieren van rechter en linker voorkamer, vooral of althans bij het afsterven, niet geheel dezelfde eigenschappen bezitten, en evenmin die van verschillende deelen der kamer, of — bij warmbloedigen — die van rechter en linker ventrikel, zal dus ook de anders reciproke geleiding tusschen de beide voorkamers onderling, resp. binnen de enkelvoudige kamer, onder abnorme voorwaarden eene irreciproke kunnen worden. Uit dit gezichtspunt zijn ook de bekende, tot dusverre geheel onverklaarde, zeldzame gevallen begrijpelijk van zelfstandig kloppen van rechter of linker atrium of van rechter of linker kamer of kamerhelft.

Spreker's hypothese wettigde het vermoeden dat men ook de reciproke geleiding van gewone dwarsgestreepte spiervezels in een irreciproke zoude kunnen veranderen, door aan de vezels op verschillende plaatsen harer lengte verschillende physiologische eigenschappen te geven.

Proeven, in die richting door hem op den gecurariseerden Sartorius genomen, hebben het vermoeden bevestigd. Dit resultaat bleek zoowel uit vergelijking der grootte van verkorting van beide spierhelften bij afwisselend directe en directe prikkeling, als uit vergelijkende metingen der duur van latentie in beide gevallen. Reeds bij het afsterven van de uitgesneden en in physiologische zoutoplossing bewaarde spier, kan het geleidingsvermogen in beide richtingen verschillend worden en komt dikwijls een korte phase, waarin maximale irritatie der ééne spierhelft zich niet op de andere, maar wel een prikkel en wel ook een niet maximale van de andere zich op de eerste kan voortplanten. Die phase duurt dikwijls slechts weinige minuten. Maar reeds geruimen tijd van te voren zijn er duidelijke kwantitatieve verschillen der geleiding voor beide richtingen merkbaar. De neerdalende geleiding (naar het knieeinde toe) verminderde in den regel spoediger dan de opstijgende. Ook bij afkoeling der eene en verwarming der andere spierhelft kwamen er allengs klim-

mende verschillen in het opstijgend en neerdalend geleidingsvermogen, tot volkomen irreciprociteit toe.

Insgelijks wanneer aan den Sartorius, in meer directe nabootsing van den toestand bij het hart, op drie verschillende plaatsen zijner lengte verschillende physiologische eigenschappen werden gegeven, b.v. het boveneinde in Curare-houdende physiologische zoutoplossing, het ondereinde in Veratrine- en Curare-houdende keukenzoutsolutie van gewone temperatuur gedompeld was, terwijl het middelstuk door ijs afgekoeld werd.

Ter illustratie van een en ander legt spreker oorspronkelijke myogrammen aan de vergadering over.

Hij stelt zich voor deze proeven met verschillende wijzigingen verder voort te zetten en ze ook op zenuwen en andere physiologisch geleidende organen uit te breiden.

Met betrekking tot de zenuwen, wenscht spr. reeds nu er op te wijzen, dat het hier ontwikkelde beginsel waarschijnlijk ook zal kunnen dienen ter verklaring van het tot dusverre geheel duistere feit van schijnbaar algeheel ontbreken van directe electrische prikkelbaarheid bij behouden geleidingsvermogen voor den normalen physiologischen prikkel, waargenomen o. a. bij regenereerende zenuwstammen, en bij zenuwen die plaatselijk door een CO^2-atmospheer zijn omgeven. De verklaring moet zijns inziens daarin gezocht worden, dat er in die gevallen door den directen electrischen prikkel wel plaatselijk, rechtstreeks, in de zenuw irritatie tot stand komt, deze laatste echter wegens haar abnorm karakter (vorm, tijdelijk verloop b.v.) zich niet op de aangrenzende zenuwdeeltjes voortplanten kan. Het zal misschien blijken dat er een vorm van kunstmatige irritatie kan gevonden worden, waarvan de voortgeleiding mogelijk is, te meer als, volgens sommige waarnemingen, door alcohol het geleidingsvermogen voor physiologische prikkels spoediger afneemt dan de gevoeligheid voor kunstmatige prikkels.

Natuurkunde. — De Heer J. D. VAN DER WAALS spreekt: „*Over kenmerken ter beslissing over den loop van de plooipuntslijn voor een mengsel van twee stoffen*".

Als bij een mengsel van twee stoffen de temperatuur en de drukking tot zoodanig bedrag zijn opgevoerd, dat de twee coëxisteerende phasen in samenstelling en dichtheid aan elkander gelijk zijn geworden, dan wordt de lijn, die de betrekking tusschen deze waarden van t en p, bij wisselenden graad van samenstelling, aangeeft „plooipuntslijn" genoemd. Deze naam is ontleend aan de omstandigheid,

dat een mengsel in bovengenoemden toestand verkeert, als het door zijn volume en zijne samenstelling de plaats inneemt van het plooipunt op het ψ vlak [1]).

Ofschoon het nog niet mogelijk is eene algemeene geldende vergelijking voor deze lijn te geven, is de theorie toch in staat de differentiaalvergelijking voor deze lijn onder zoodanigen vorm af te leiden, dat de voornaamste bijzonderheden kunnen voorzien worden, en dat in gevallen, waarin de waarnemingen onzekerheid laten over den loop dezer lijn, beslissing wordt gebracht.

Deze differentiaalvergelijking heeft de volgende eenvoudige gedaante.

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2_{p\tau}}}{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2_{p\tau}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In deze vergelijking stellen p, τ en x de drukking, de temperatuur en de samenstelling der phase voor, ∂ en η de entropie [2]).

Zij wordt gevonden op soortgelijke wijze als de vergelijkingen A (l. c. pag. 15), wanneer men evenwel ook τ variabel stelt — en dus uit

$$\left\{ V_2 - V_1 - (x_2 - x_1)\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_{p\tau} \right\} dp = \left\{ \eta_2 - \eta_1 - (x_2 - x_1)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)_{p\tau} \right\} d\tau +$$

$$+ (x_2 - x_1) \frac{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial V_1^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial V_1 \partial x_1}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial V_1^2}} dx_1 \quad . \quad . \quad (2)$$

Bij de plooipunts-omstandigheden is om dubbele reden de factor van dx_1 gelijk nul, — ten eerste, omdat het punt op de spinodale lijn ligt, en dus $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial V_1^2} = \left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial V_1}\right)^2$ is — en ten tweede omdat $x_2 = x_1$ is. Schrijft men nu $\dfrac{dp}{d\tau} = \dfrac{\eta_2 - \eta_1 - (x_2 - x_1)\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)_{p\tau}}{V_2 - V_1 - (x_2 - x_1)\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_2}\right)_{p\tau}}$, en

[1]) Archives Neerland. T. XXIV pag. 55.

[2]) Voor de verdere notaties verwijs ik naar mijne Théorie Mol. Arch. Neerl. T. XXIV.

neemt men in aanmerking, dat ook $V_2 = V_1$ en $\eta_2 = \eta_1$ is, dan vindt men vergelijking (1).

Liefst stellen wij (1) echter nog onder anderen vorm door $\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2_{p\tau}}$ te elimineeren.

Uit
$$\tau\, \partial\eta = d\varepsilon + p\, dV - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{v\tau} dx$$

leiden wij af:

$$\tau\, \frac{\partial\eta}{\partial x_{p\tau}} = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)_{p\tau} + p\, \frac{\partial V}{\partial x_{p\tau}} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_v$$

en

$$\tau\, \frac{\partial^2\eta}{\partial x_{p\tau}} = \left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}\right)_{p\tau} + p\left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right)_{p\tau} - \left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial V}\right)^2}{\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}}\right\}$$

Voor punten op de spinodale lijn is de laatste term gelijk nul en mogen wij dus voor [1]) schrijven.

$$\tau\, \frac{dp}{d\tau} - p = \frac{\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}\right)_{p\tau}}{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Verder is het wenschelijk ook $\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}\right)_{p\tau}$ te transformeeren; uit

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_{p\tau}} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial x^{v\tau}} + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial V}\right)_{x\tau} \frac{\partial V}{\partial x_{p\tau}}$$

volgt

$$\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}\right)_{p\tau} = \left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}\right)_{v\tau} + 2\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\,\partial V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{p\tau} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial V^2_{x\tau}}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2_{p\tau} + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial V}\right)_{x\tau}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau}$$

en dus wordt (3) veranderd in

$$\tau\, \frac{dp}{d\tau} - \left(p + \frac{\partial\varepsilon}{\partial V_{x\tau}}\right) = \frac{\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2_{p\tau} + 2\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\,\partial V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{p\tau} + \left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau}} \quad . \quad (4)$$

Het is niet moeielijk aan te toonen dat $p + \frac{\partial\varepsilon}{\partial V_{x\tau}}$ de waarde

aangeeft van $\tau \left(\frac{dp}{d\tau}\right)_x$, als men door $\left(\frac{dp}{d\tau}\right)_x$ verstaat de verhouding van dp en $d\tau$, als men de in kritische phase verkeerende stof mocht beschouwen als niet splitsbaar en dus met een spanning van den verzadigden damp zooals een enkele stof die vertoont.

De grootheden $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2}$, $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial V}$ en $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$ zijn, daar $\varepsilon = -\frac{a_x}{V}$ is, van de gedaante $-\frac{2\, a_x}{V^3}$, $\frac{\frac{\partial a_x}{\partial x}}{V^2}$ en $-\frac{\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}}{V}$ en kunnen dus nimmer oneindig groot worden — en slechts bij uitzondering nul.

De bijzondere punten, die de plooipuntslijn kan vertoonen, zullen dus moeten verklaard worden door de bijzondere waarden, die $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau}$ en $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{p\tau}$ kunnen aannemen. Daarvoor is het dus noodig, regels te vinden voor deze waarden in het plooipunt. In den regel zal de lijn van gelijke drukking de spinodale lijn in het plooipunt aanraken (l. c. fig. 5). Daarop komt alleen uitzondering, als de spinodale lijn een dubbelpunt heeft [1]). Dan ontstaan twee plooien uit éene of omgekeerd — en de lijn van gelijke drukking loopt door het snijpunt der dubbellijn als derde tak, evenwijdig aan de limietrichting der lijnen, die twee nodes verbinden. Laten wij voor een oogenblik deze uitzondering rusten, dan kan worden aangetoond dat de lijn van gelijke drukking steeds zoo gekromd is, dat zij de plooi omhult. Is dus het plooipunt aan den kant der kleine volumes, dan is $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau}$ positief; en omgekeerd — terwijl de overgang van positief tot negatief door oneindig groot geschiedt.

Het bewijs voor deze stelling omtrent de waarde van $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau}$ kan op verschillende wijze gegeven worden. Onder anderen volgt uit

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{p\tau} = -\frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}},$$

dat op een punt der spinodale lijn

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_p \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}\right)^2 = \frac{\partial \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V}\right)^2 \right\}}{\partial V_{x\tau}}$$

geldt.

[1]) Zie D. J. Korteweg: Sur les points de plissement. Arch. Neerl. pag 77.

Ligt het plooipunt nu aan den kant der kleine volumes dan is voor iets kleinere waarde van v de uitdrukking $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial V}\right)^2$ positief, en is deze functie dus met V afnemende, en dus $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau}$ positief.

De overgang van $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau} = \infty$ heeft dus plaats als het plooipunt noch aan de zijde der kleine, noch aan de zijde der groote volumes ligt, en dus als een lijn, evenwijdig aan de V-as, de spinodale lijn in het plooipunt raakt. In dit geval is dus ook $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{pr} = \infty.$

Maar de verhouding $\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2_{p\tau}}{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau}}$, welke gelijk is aan $-\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)_{p\tau}}{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial V^2}\right)_{p\tau}}$ blijft gelijk aan nul, zoolang $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial V^2}\right)_{p\tau}$ eene zekere positieve of negatieve waarde heeft.

Passen wij dit toe op vergelijking (4), dan blijkt, dat als het plooipunt aldus gelegen is, de waarde van $\frac{dp}{d\tau}$ voor de plooipuntslijn even groot zal zijn als $\left(\frac{dp}{d\tau}\right)_x$.

Stellen wij nu eerst de vraag: in welke gevallen het plooipunt aldus gelegen is. Daar dan de lijn van gelijke drukking evenwijdig aan de V-as loopt, zal $\left(\frac{dp}{dV}\right)$ gelijk nul moeten zijn — of $\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}_{x\tau} = 0$, waarbij wij wel onmiddellijk zullen kunnen voegen $\frac{\partial^3\psi}{\partial V^3}_{x\tau} = 0$ of in woorden: dezelfde eischen, die voor eene ondeelbare stof moeten vervuld worden, zal zij in kritischen toestand verkeeren, moeten ook in dit bijzonder geval voor het mengsel vervuld worden. Daar echter ook $\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial V}\right)_2$ moet zijn, kunnen er twee gevallen onderscheiden worden, nl. 1°. als ook $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial V}$ gelijk nul is; 2°. als $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ gelijk oneindig is.

Het tweede geval komt aan de kanten van het ψ-vlak voor, dus voor de afzonderlijke samenstellende stoffen. Het eerste geval alleen

dan, als er bij gelijke gegeven temperatuur mengsels van maximum- of minimum-spanning voorkomen. (l. c. pag. 22 en 23). De voorwaarde in de aangehaalde plaats gevonden kunnen wij aldus schrijven

$$\frac{\int_{V_1}^{V_2} \frac{\partial p}{\partial x_{v\tau}}\, dV}{V_2 - V_1} = 0,$$ waarvan als V_1 tot V_2 nadert de limietwaarde is gelijk aan $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V} = 0.$

In dat geval besluiten wij dus, dat de lijn die bij elke temperatuur de maximum- of minimumdrukking aangeeft, als eindpunt een element gemeen moet hebben met de plooipuntslijn [1].

Voor de enkele stof geldt $\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2_{p\tau}}{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau}}$ gelijk nul echter niet — omdat daar $\frac{\partial^2 x}{\partial V^2}_{p\tau}$ niet als van nul verschillend mag aangenomen worden. Men vindt voor den begin- en eindloop der plooipuntslijn of lijnen

$$\tau\left(\frac{dp}{d\tau} - \frac{dp}{d\tau_x}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2}\, \frac{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V}\right)}{\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial V^2} - \frac{1}{MRT}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Alleen dus als de samenstelling, waarvoor vloeistof en damp gelijk samengesteld zijn, en die met stijgende temperatuur verandert, zich tot aan de enkele stoffen verplaatst had, zou het kunnen gebeuren dat de plooipuntslijn in haar begin rakend was aan de $p\,\tau$-lijn dier enkele stof.

Hiermede is dus een der merkwaardige punten der plooipuntslijn behandeld, en aangetoond dat, waar zij de lijn van maximum- of minimumdruk ontmoet, zij door deze geraakt wordt, en zij deze tot een eind brengt.

Een tweede merkwaardig punt komt voor als $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau} = 0$ is. Dit kan alleen voorkomen, óf als een plooi zich in tweeën splitst, óf als twee plooien tot een enkel punt ineenvloeien, dus als er

[1] Dit besluit was uit geometrische beschouwingen onmiddellijk te vormen, als men in acht neemt, dat zoowel de plooipuntslijn als de lijn van maximumspanning tot de "contour-apparent" van het p, τ, x-vlak behooren op het $p\tau$-vlak.

samenstellingen zijn, waarvoor de plooipuntstemperatnur buiten de grenzen der kritische temperaturen der samenstellende stoffen ligt.

Als eene plooi zich splitst, zal dus deze stelling moeten gelden, dat de lijn van gelijke drukking, die door het splitsingspunt gaat, daar ter plaatse een buigpunt vertoont. Dit zou reeds daaruit kunnen worden afgeleid, dat, als de splitsing heeft plaats gehad, voor die enkele lijn er twee gekomen zijn, wier kromming aan elkander tegengesteld is. De enkele lijn, op het oogenblik van splitsing, moet dus noch naar de eene, noch naar de andere zijde gekromd zijn.

Analytisch bewijst men deze stelling door op te merken dat als $f = 0$ de vergelijking der spinodale lijn is, voor een zich splitsende spinodale lijn zoowel $\frac{\partial f}{\partial V} = 0$ als $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ zal moeten gelden.

Hierboven is gevonden

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}\right)^2 = \frac{\partial f}{\partial V}.$$

Naast deze vergelijking kunnen wij, door x en V met elkander te verwisselen, en p met $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{v\tau}$ ook deze tweede schrijven:

$$-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial V^2}\right)_{q\tau}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)^2 = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \left(\frac{\partial \psi}{\partial V}_{v\tau} \text{ door } q \text{ voorstellende}\right).$$

In een splitsingspunt is dus óf $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{p\tau}$ óf $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial_2 V}\right)_{p\tau}$ gelijk nul, daar $\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}$ en $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ niet gelijktijdig (zelfs niet bij uitzondering) gelijk nul kunnen zijn. Maar het is niet moeilijk aan te toonen dat $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial V^2}\right)_q$ gelijk is in het plooipunt aan $\left(\frac{\partial_2 x}{\partial V^2}\right)_p$.

Uit dit alles volgt, dat ook de omgekeerde stelling geldt, namelijk $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}_{p\tau} = 0$ duidt een splitsingspunt aan.

Uit de vergelijking (4) volgt dat dan $\frac{d p}{d \tau} = \infty$ is.

De beide behandelde merkwaardige punten komen voor bij de plooipuntslijn voor mengsels van NO_2 en C_2H_6, door KUENEN zeer onlangs proefondervindelijk bepaald. De waarnemingen moesten het echter, uit den aard der zaak, onbeslist laten, of bij het eerst behandelde merkwaardige punt de lijn der maximumspanning in-

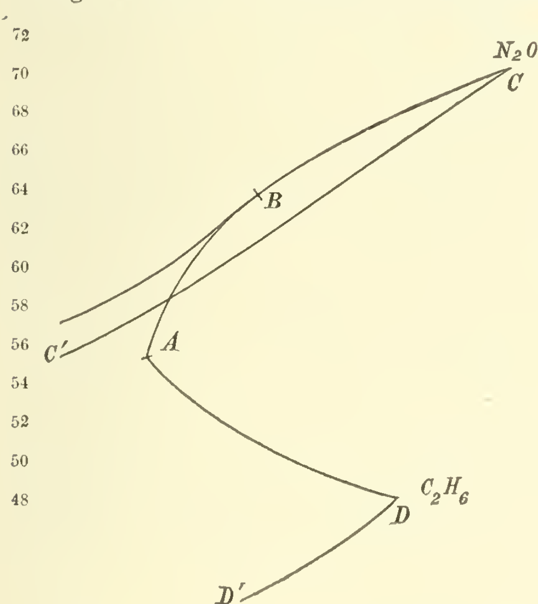
derdaad rakende loopt aan de plooipuntslijn, en of in het tweede punt de plooipuntslijn eene vertikale raaklijn heeft. En KUENEN besloot zelfs tot discontinuiteit bij beide punten.

Had men reden te twijfelen aan de beschouwingen der theorie, dan zou een rechtstreeks proefondervindelijk onderzoek in het werk gesteld moeten worden en zou wel zeker het continue beloop der plooipuntslijn in de beide genoemde punten moeten blijken.

In het voorbijgaan merk ik nog op, dat, als de grootheid a, die in mijne theorie van een mengsel voorkomt, niet van x afhangt, de berekeningen verder kunnen voortgezet worden. In dat geval vindt men

$$\tau \frac{dp}{d\tau} - \left(p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial V_{x\tau}}\right) = \frac{\tau^2 V^6}{8a^2(V-b)^2}\left(V - \frac{b_1 + b_2}{2}\right) \times \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2}.$$

Dan is $\frac{dp}{dt} = \infty$ als $V = \frac{b_1 + b_2}{2}$; eene uitkomst, die ook verkregen wordt als men het punt zoekt, waarin een plooi zich splitst. In dat geval betreft het echter eene afsnoering van de lengteplooi.



Nevensstaande figuur duidt den loop der plooipuntslijn aan, aan de waarnemingen van KUENEN ontleend en eenigszins gecorrigeerd volgens de vorige beschouwingen. De lijnen DD' en CC' geven de spanningen van den verzadigden damp van C_2H_6 en NO_2. De kromme $C\ B\ A\ D$ is de plooipuntslijn. In A moet de raaklijn vertikaal staan en in B wordt deze lijn ontmoet en geraakt door de lijn der grootste spanningen.

Daar $\frac{\tau\, dp}{p d\tau}$ voor een enkele stof in het kritisch punt de waarde 7 heeft, moet volgens de vorige beschouwing deze waarde ook voor het mengsel in B aanwezig gelden — en ook dit besluit wordt door de waarnemingen voldoende bevestigd gevonden.

Resumeerende, kan vergelijking (4) door voor $\left(\frac{dV}{dx}\right)_p$ de waarde $-\frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial V}}{\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}}$ in de plaats te stellen, aldus geschreven worden:

$$\tau\frac{dp}{d\tau}-\left(p+\frac{\partial\varepsilon}{\partial V_{\tau x}}\right)=\frac{\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial V^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial V}\right)^2-2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial V}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial V}\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}\right)^2}{-\frac{\partial f}{\partial V}}$$

of onder den vorm:

$$\tau\frac{dp}{d\tau}-\left(p+\frac{\partial\varepsilon}{\partial V_{x\tau}}\right)=\frac{\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial V}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial V}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}}{-\frac{\partial f}{\partial x}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial V}$$

als wij in acht nemen, dat $\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p+\frac{\partial f}{\partial x}=0$ is voor een plooipunt.

Nu kan (*a*) $\frac{\partial f}{\partial V}=0$ zijn en $\frac{\partial f}{\partial x}\gtrless 0$

(*b*) $\frac{\partial f}{\partial V}=0$ en $\frac{\partial f}{\partial x}=0$

(*c*) $\frac{\partial f}{\partial V}\gtrless 0$ en $\frac{\partial f}{\partial x}=0$

Voor de discussie verkiezen wij in geval (*a*) den tweeden vorm met $\frac{\partial f}{\partial x}$ in den noemer. Nu moet $\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}$ gelijk nul zijn, en hebben wij twee ondergevallen:

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial V}=0$$

$$\text{of}\quad(\beta)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\infty$$

In geval (α) is $\tau\frac{\partial p}{\partial\tau}=p+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial V}\right)_{x\tau}$ omdat $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial V}=0$.

In geval (β) vinden wij $\tau \dfrac{dp}{d\tau} - \left(p + \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial V_{x\tau}}\right) = \dfrac{\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V}}{\lim \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}}$

of
$$\tau \frac{dp}{d\tau}\left(p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial V_{x\tau}}\right) = - \frac{\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V}}{\dfrac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial V^2} + \left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V}\right)^2 \lim \dfrac{\dfrac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}}{\left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)}}$$

Daar geval (β) slechts aan den kant van het ψ vlak kan voorkomen is $\lim. \dfrac{\dfrac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}}{\left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)^2} = - \dfrac{1}{MRT}$.

Nemen wij de onderstelling van (b), n.l. zoowel $\dfrac{\partial f}{\partial V} = 0$ als $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, dus splitsing der spinodale lijn, dan behoeven wij noch $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}$, noch $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$, noch $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V}$ gelijk nul te stellen — en wordt dus $\dfrac{dp}{d\tau} = \infty$.

Het derde geval $\dfrac{\partial f}{\partial V} \gtrless 0$ en $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ schijnt mij van geringe beteekenis. Dan is in het plooipunt $\left(\dfrac{dV}{dx}\right)_p = 0$, en vindt men

$$\tau \frac{dp}{d\tau} = p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial V_{x\tau}} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_v^2} \frac{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}}{\dfrac{\partial^3 x}{\partial x^2 \partial V}}.$$

Neemt men voor ε de waarde, die ik in mijn Théor. Molec. daarvoor heb aangenomen, nl.

$$\varepsilon = - \frac{a_1 (1-x)^2 + 2\, a_{12}\, x (1-x) + a_2 x^2}{V}$$

dan kan vergelijking (4) aldus geschreven worden

$$T\left[\frac{dp}{dT}-\left(\frac{dp}{dT}\right)_x\right]=-\frac{2a}{V}\frac{\left[\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{pT}-\frac{1}{2a}\frac{\partial a}{\partial x}\right]^2+\frac{a_1 a_2-a_{12}^2}{a^2}}{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{pT}}$$

In geval $a_{12}^2 < a_1 a_2$, vindt men den volgenden regel:

De plooipuntslijn stijgt steiler dan de spanningslijn, die het mengsel zou hebben als het als een onsplitsbare stof mocht beschouwd worden, ingeval $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x}\right)_{pT}$ negatief is — en omgekeerd.

In geval $a_{12}^2 > a_1 a_2$ zal deze regel meestal gevolgd worden, daar de uitdrukking

$$\left(\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial x_{pT}}-\frac{1}{2a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{a_1 a_2-a_{12}^2}{a^2}\right)$$

wel meestal positief zal zijn.

Scheikunde. — De Heer Behrens handelt: „*Over kunstmatig dichroïsme*".

De heer Behrens doet eenige mededeelingen over kunstmatig dichroïsme, van soortgelijken aard als bij de proeven van de Sénarmont met strontiumnitraat en campèche-kleurstof. Vezels van vlas en hennep worden door Congo-rood of Benzoazurine sterk dichroïtisch gemaakt. Eene soortgelijke uitwerking hebben de meeste der tetrazoverbindingen, die onder de benaming van „benzidine-kleurstoffen" begrepen worden. Door kleuring met naphtoloranje en andere zoog. zuur-kleurstoffen wordt geen dichroïsme voortgebracht, evenmin door fuchsine, malachietgroen en verwante basische kleurstoffen. Slechts drie basische kleurstoffen werden hiertoe geschikt gevonden: methyleen-blauw, safranine en Bismarck-bruin. Eene proef met isatine, waarvan mikroskopische kristallen sterk dichroïtisch zijn, leverde sterk geel gekleurde vezels zonder eenig dichroïsme.

Van andere vezelstoffen komt celstof van stroo het naast bij vlas te staan; katoen- en houtcellen volgen op aanzienlijken afstand, zijde vereischt zeer sterke kleuring met benzoazurine en wol kon door de bovengenoemde kleurstoffen niet dichroïtisch gemaakt worden. De oriëntatie van het dichroisme is doorgaans van dien aard, dat de donkerste kleur bij trillingen behoort, evenwijdig aan de lengterichting der vezels; echter maken vaatcellen van hout hierop eene uitzondering.

Over het algemeen schijnt sterk dichroïsme met sterke polarizatie samen te gaan; intusschen doet zich ook hier eene uitzondering voor, in het gedrag van zijde en wol. Men heeft met een verschijnsel te doen, dat van meer ingewikkelden aard is dan men zich op grond der proef van DE SÉNARMONT zou voorstellen, en niet door combinatie van gewone absorptie met gewone dubbele breking te verklaren.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt voor het Zittingverslag aan eene mededeeling van den Heer Prof. W. H. JULIUS: „*Over eene inrichting om meetinstrumenten te beveiligen tegen de dreuningen van den bodem*".

De onophoudelijke schudding en dreuning, waaraan de gebouwen eener drukke stad onderhevig zijn, is aan hen, die fijne metingen wenschen te verrichten in een universiteitslaboratorium, doorgaans maar al te goed bekend. Haar schadelijke invloed op de rust van vrij hangende voorwerpen, zooals de magneetsystemen der galvanometers, is in 't algemeen des te grooter naarmate het systeem lichter en zijn traagheidsmoment om de vertikale as kleiner is.

H. DU BOIS en H. RUBENS hebben de voorwaarden ontwikkeld [1]) — en bij den door hen geconstrueerden galvanometer zooveel mogelijk in toepassing gebracht — aan welke een lichaam, dat aan een draad zonder torsie is opgehangen, voldoen moet, opdat kleine verplaatsingen van het ophangpunt althans geen draaiingen van het systeem om een vertikale as ten gevolge kunnen hebben en dus het beeld eener schaalverdeeling niet doen afwijken.

Wanneer men een systeem zoo vervaardigd heeft, dat het aan de door hen gestelde eischen werkelijk voldoet, dan is daarmee een groote schrede gedaan. Maar het is helaas zeer moeilijk en bij kleine systemen hoe langer hoe moeilijker, de „traagheidssymmetrie" met de vereischte nauwkeurigheid tot stand te brengen en bij het hanteeren van den toestel te behouden. Ik heb daarvan nog onlangs bij het vervaardigen van uiterst lichte radiomicrometerketentjes de pijnlijke ondervinding opgedaan en kwam tot de overtuiging, dat een onmisbare voorwaarde om met zulke systemen te kunnen werken, toch eigenlijk gelegen was in het bezit van een plaats, waar het geheele instrument vrij van den invloed der dreuning kon worden opgesteld.

---

[1]) H. DU BOIS und H. RUBENS, Wied Ann. 48, s. 241.

Hoogstwaarschijnlijk zal menigeen reeds met meer of minder goeden uitslag tegen de trillingen van den bodem gestreden hebben. Toch zijn, naar ik meen, slechts weinige welgeslaagde pogingen in deze richting bekend gemaakt. In „Monthly Notices of the Royal Astronomical Society" 17, p. 160, beschrijft AIRY een door hem gebruikte inrichting om een rustigen kwikhorizont te verkrijgen. Hij plaatst den kwikbak op een tafeltje, dat hangt aan caoutchoucbanden. De ophangpunten bevinden zich boven aan een kleine houten stellage, die op een tafeltje bevestigd is, dat op zijn beurt wederom aan caoutchoucbanden is opgehangen, en deze combinatie herhaalt zich nog eens. Ook in ons land is sedert een paar jaren een dreunvrije opstelling in gebruik, van welker uitstekende werking ik mij herhaaldelijk heb kunnen overtuigen, en wel in het physiologisch laboratorium te Leiden. Prof. EINTHOVEN heeft daar namelijk den kwikmeniscus van een capillair-electrometer volkomen tegen dreuning beschut door het instrument te bevestigen op een groote ijzeren plaat, drijvende op kwik.

Het was mij om verschillende redenen niet mogelijk, bij een zeker onderzoek, waarmede ik mij bezig hield, de laatstgenoemde methode toe te passen, vooral omdat de hiervoor benoodigde inrichting in mijn bijzonder geval op zeer groote schaal had moeten worden uitgevoerd.

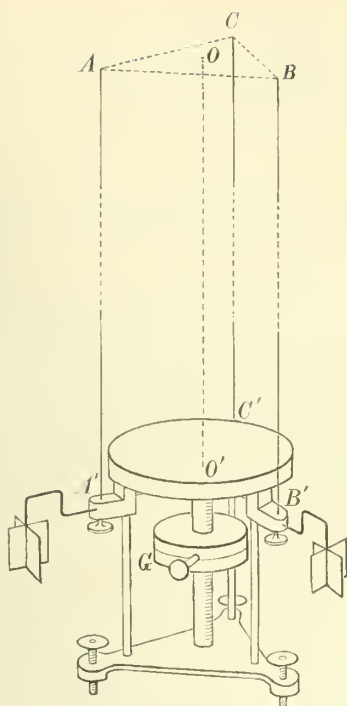
Daar het mij nu onlangs gelukt is, hetzelfde doel langs geheel anderen weg te bereiken, acht ik het niet overbodig, ook mijne resultaten te vermelden.

Het uitgangspunt mijner overwegingen was, dat men om den invloed der dreuningen te bekampen er naar streven moest:

1°. de steeds wisselende krachten, waaraan het te beschutten instrument door de beweging zijner steunpunten blootstaat, zooveel mogelijk te verzwakken, en

2°. de omstandigheden zóó te kiezen, dat die verzwakte krachten zoo min mogelijk verandering kunnen brengen in den stand der verschillende punten van den toestel, en wel speciaal van die punten, wier stabiliteit het meest noodzakelijk is.

Dit voerde, na eenige voorloopige proeven, tot de volgende constructie. Aan een balk (die liefst zonder verbinding met de zoldering boven in de muren van het vertrek vast gemetseld is) of aan eene hooge wandconsole denke men zich in de hoekpunten van een horizontalen gelijkzijdigen driehoek *A B C* drie staaldraden bevestigd van 2 à 3 M. lengte. Onder aan deze draden hangt een niet zeer zwaar, doch stevig geconstrueerd statief (in de figuur op ongeveer $^1/_{10}$ van de ware grootte afgebeeld) in welks midden zich een cylin-



der met tandreep bevindt. Langs dezen kan een gewicht G van 3 of 4 kilo met behulp van een daarbinnen gelegen rondsel op en neer bewogen worden en door een klemschroef (niet zichtbaar in de teekening) op iedere hoogte worden vastgezet. Op het tafeltje plaatst men nu het te beveiligen instrument, daarbij zorg dragende, dat zijn zwaartepunt zoo goed mogelijk in de as der geheele inrichting komt, en schroeft het liefst er op vast.

Door het gewicht G te verschuiven is men in staat, het zwaartepunt van het gansche hangende stelsel in vertikalen zin te verplaatsen. De bevestigingspunten A' B' C' der draden behooren zich te bevinden loodrecht onder de punten A, B, C.

Aan de onderste plaat van het statief zijn nog drie stelschroeven aangebracht. Deze doen slechts dienst wanneer men aan den toestel iets te veranderen heeft; in dat geval wordt een gewone verschuifbare steltafel, die zich er dicht onder bevindt, een weinig omhoog geschoven, zoodat het statief daarop rust.

Onderzoeken wij thans, welke invloed van de deels periodische, deels geheel onregelmatige verplaatsingen der punten A, B, C op ons instrument te verwachten is, en letten wij daarbij vooreerst slechts op de horizontale componenten der bewegingen.

Met vrij groote zekerheid mag men vooropstellen, dat de drie ophangpunten in hoofdzaak volkomen gelijke bewegingen gelijktijdig uitvoeren, en dat dus de golven in de draden bovenaan in dezelfde phase verkeeren. Zijn de draden even sterk gespannen (en dat zal het geval zijn wanneer het zwaartepunt ligt in de lijn, die door de middelpunten onzer driehoeken A B C en A' B' C' gaat), dan komen de drie golven ook steeds met gelijke phase beneden aan en geven daar op een zeker oogenblik aan het hangende voorwerp (dat we ons als geheel vast voorstellen) in A' B' C' drie gelijke en gelijk gerichte horizontale impulsen.

Indien nu het zwaartepunt van het lichaam boven of beneden het vlak A' B' C' valt, zal de stoot niet alleen een verschuiving van het

zwaartepunt teweeg brengen, maar bovendien een draaiing om een horizontale, door dat punt gaande as. De gelijkheid der spanning van de draden wordt daardoor gestoord en er is aanleiding gegeven tot slingeringen van het systeem met vrij korte periode om zulk een horizontale as.

Zorgen wij echter, dat het zwaartepunt in het steunvlak $A' B' C'$ gelegen is, dan vermijden we althans de bedoelde draaiingen en slingerbewegingen geheel.

Verder heeft het systeem nog vrijheid om te slingeren om de lijn $O O'$. Deze soort van beweging zou kunnen worden opgewekt door een draaiing van driehoek $A B C$ om de eene of andere vertikale as; maar het is duidelijk dat de gewone schommelingen van een gebouw daartoe in zeer veel mindere mate aanleiding geven dan tot evenwijdige verplaatsingen der ophangpunten. Ook de evenwijdige verplaatsingen zouden intusschen $A' B' C'$ kunnen doen draaien, doch alleen in geval de drie draden ongelijke spanning bezaten, waardoor de golven met ongelijke phase zouden aankomen — en dit geval hebben wij juist zooveel mogelijk buiten gesloten. Draaiingen om OO' zijn dus, als gevolg van de dreuning, nauwelijks te verwachten.

Maar horizontale verplaatsingen van het zwaartepunt zullen niet vermeden kunnen worden. Daaruit ontstaan op den duur slingerbewegingen van de geheele inrichting om het punt O, waarbij intusschen de as van het instrument volkomen vertikaal blijft

Het verdient opmerking, dat er voor ieder gebouw slingeringen van bepaalden duur zijn, die daarin door de onregelmatige dreuningen van den grond op sommige oogenblikken bijzonder sterk worden opgewekt. Men moet er dus op voorbereid zijn, dat toevallig tusschen deze perioden en die van ons hangend systeem een eenvoudige verhouding zou kunnen bestaan, wat voor de rust van dit laatste zeer bedenkelijk zou wezen. In zulk een geval diende men de lengte der draden eenigszins te wijzigen; meestal zal dat echter niet noodig zijn. Hoe grooter de eigen periode van het systeem is ten opzichte van de meest voorkomende perioden der dreuning, des te minder kans zal er in 't algemeen zijn voor het tot stand komen van een groote amplitude. Daarom moet men de draden niet te kort nemen.

Ten einde verder de bedoelde slingerbewegingen en de draaiende slingeringen — die dan toch steeds in zekere mate te voorschijn treden omdat ook luchtstroomingen er aanleiding toe kunnen geven — nog meer te beperken, wordt vloeistofdomping toegepast. Daartoe bevinden zich in drie punten aan den omtrek van het statief stevige messingdraden, ieder voorzien van een tweetal vertikale gekruiste

metaalplaatjes. Deze zijn bij het gebruik van den toestel ondergedompeld in bakjes met vloeistof, die op de eene of andere wijze aan den wand of den vloer bevestigd zijn.

Door dus het zwaartepunt in 't midden van driehoek $A' B' C'$ te brengen is bereikt, dat de horizontale, in de hoekpunten aangrijpende krachten aan alle punten van het lichaam gelijke en gelijk gerichte verplaatsingen doen ondergaan, waarmee alzoo buitengesloten is, dat sommige uitstekende deelen (bijv. een torsieknop) bovenmatig groote bewegingen verkrijgen;

door de ophangdraden lang en daarmee de eigen periode van het systeem groot te nemen, is de kans voor „resoneeren" met zekere perioden van de grondbewegingen verminderd;

en door demping toe te passen eindelijk brengt men de slingeringen, die nog mochten ontstaan, spoedig tot rust.

Thans blijft over na te gaan, in hoeverre door onze inrichting voldaan wordt aan den eisch, dien we bij het vermelden van de uitgangspunten onzer overwegingen in de eerste plaats noemden, namelijk dat men de krachten zelve zooveel mogelijk moest verzwakken.

Hoe groot de bedoelde krachten zijn, wanneer het instrument eenvoudig op een tafel staat, is moeilijk te zeggen, want daarbij komen wrijvingsweerstanden, massa van de tafel, enz. in aanmerking. Is het werktuig aan een steenen pijler stevig bevestigd, dan zijn de krachten in ieder geval zeer groot, immers de toestel zou dan noodzakelijk alle bewegingen van den pijler terstond moeten volgen.

Hangt het lichaam aan een draad, dan kunnen wij een meer bepaalde uitspraak doen aangaande de grootte der werkende krachten. Men beschouwe daartoe den draad als een volmaakt buigzame, gespannen snaar, waarin door de horizontale verplaatsingen van het bovenste uiteinde transversale golven ontstaan. Deze worden aan het onderste uiteinde bijna onverzwakt teruggekaatst. Bij een gegeven spanning en bij gegeven amplitude der bewegingen van het ophangpunt zullen, al naar gelang van de snelheid dezer bewegingen, golven van verschillende lengte en verschillende „steilheid" door den draad gaan. De kracht, die op het onderste bevestigingspunt van den draad werkt, is nu evenredig aan de steilheid daar ter plaatse en wel gelijk aan het spannende gewicht maal (den sinus van) den steilheidshoek.

Zij a mM. de grootste uitwijking van het ophangpunt; zij de draad 2 M. lang; dan is ingeval de bewegingen langzaam, dus de golven zeer lang zijn ten opzichte van den draad, de maximale steilheid $\frac{a}{2000}$. Stellen we het spannende gewicht op 4000 gr.; het

gewicht van 1 M. draad op 2.5 gr., dan is de voortplantingssnelheid der golven 125 M. per sec. Indien nu het ophangpunt eens een harmonische beweging uitvoerde, waarvan de periode $\frac{2}{125}$ sec. was, zou de draad juist een geheele golf bevatten; in welk geval men voor de maximale steilheid vindt: $\frac{\frac{\pi}{2} a}{{}^1/_4\, l} = \frac{2\,\pi\, a}{2000}$. Hoe korter de trillingsduur, des te grooter is bij gegeven amplitudo de maximale steilheid. De verschillende waarden, die de steilheidshoek doorloopt, worden bepaald door de absolute snelheid, waarmee het ophangpunt zich verplaatst. Dit is evenzeer van toepassing, als de beweging niet harmonisch is. Wanneer nu bijv. op een gegeven oogenblik de absolute snelheid zoo groot was, als de grootste snelheid eener harmonische beweging van 62,5 perioden per sec. met een amplitude van 0,1 mM., dan zou de daarmee overeenkomende steilheid van de golf $\frac{2\,\pi\, a}{2000} = \frac{\pi}{10000}$ zijn en de kracht $\frac{\pi}{10000} \times 4000 = 0{,}4\,\pi$ gram. In dit geval zou dus op onze massa van 4000 gr. een kracht werken van slechts ruim 1 gr. Men kan zich hieruit aangaande de grootte der werkende krachten eenig denkbeeld vormen.

Wij hebben tot nu toe de vertikale componenten der dreuning buiten beschouwing gelaten. Deze oefenen op het hangende voorwerp grootere krachten uit dan de horizontale verschuivingen. Want laat bijvoorbeeld de vertikale uitwijking $\frac{1}{n}$ van de elastische verlenging bedragen, die de draad door de belasting heeft ondergaan, en denken wij ons het lichaam nog in den evenwichtsstand, dan is de kracht, die het in beweging tracht te brengen, $= \pm\ \frac{1}{n}$ van zijn gewicht. Daar nu de staaldraad in het straks gebruikte voorbeeld een uitrekking van nauwelijks 1.5 mM. zou ondergaan, terwijl het gewicht 4 Kgr. bedroeg, worden bij verplaatsingen van 0.1 mM. reeds krachten van enkele hectogrammen gewekt. Ook hierom is het dus wenschelijk, de draden niet te kort te nemen.

Maar zuiver vertikale trillingen zijn voor galvanometers en dergelijke toestellen het minst schadelijk. Slechts dient voldaan te zijn aan de voorwaarde dat de storingen in de steunpunten A' B' en C' gelijktijdig aankomen, anders zouden draaiingsmomenten om horizontale assen ontstaan en de bewegingen van het instrument dus niet meer zuiver vertikaal wezen. In de ongelijktijdige aankomst der vertikale trillingen zal mede een hoofdoorzaak liggen, waardoor de pogingen om een instrument

tegen dreuning te beveiligen door het op stukken caoutchouc, vilt of op spiraalveeren te plaatsen, meestal mislukken. Bij onze inrichting daarentegen moeten de impulsen vrij zuiver gelijktijdig aankomen, vooreerst omdat de snelheid van longitudinale golven in snaren slechts in geringe mate van de spanning afhankelijk is, en ten tweede omdat bovendien de draden zoo goed mogelijk even sterk gespannen zijn.

Wat nu de praktische waarde der gegeven beschouwingen betreft, kan ik slechts wijzen op eenige voorloopige waarnemingen, daar het beschrevene, stevig geconstrueerde statief met verplaatsbaar zwaartepunt nog niet gereed is. Maar ik heb proeven genomen met een radiomicrometerketen van 20 milligram, binnen een toestel van ruim 2 KGr. gewicht opgehangen aan een kwartsdraad, die ongeveer $1^1/_2$ micron dik en 5 cM. lang was. Wanneer de toestel op een steenen pijler stond, vertoonde het systeem een zoo groote bewegelijkheid, dat een lichtbeeld, door het spiegeltje geworpen op een 2 M. verwijderde schaal, voortdurend trillingen maakte van 10 tot 20 mM. amplitude, die bij het passeeren van rijtuigen enz. natuurlijk nog toenamen. Stond het instrument op een niet van den vloer geisoleerde tafel, dan was een voetstap voldoende om het lichtbeeld slingeringen van verscheidene decimeters te doen maken. Zoodra echter de toestel opgehangen was aan drie dunne staaldraden van $1^1/_2$ M. lengte en daaraan zoodanig bevestigd, dat het zwaartepunt volgens ruwe bepaling in het steunvlak lag, kwam het lichtbeeldje spoedig geheel tot rust en bedroeg de onzekerheid in de aanwijzing stellig geen halve millimeter meer.

Bij deze proef waren de draden van boven vastgemaakt aan een balkje, dat over twee los op den houten vloer staande kasten gelegd was, zoodat de ophangpunten sterk onder den invloed verkeerden van dreuning, door het loopen veroorzaakt. Toch verplaatste bij hard stampen op den vloer het lichtbeeldje zich slechts een of twee millimeters. De dempers waren gedompeld in glaasjes met olie.

Verbond men aan den toestel op stevige wijze een gewicht van een kilo, hetzij boven of onder het steunvlak, dan kwam het beeldje bij stampen in heftige slingering met een amplitude van 2 tot 5 c.M.

Het is dus blijkbaar niet moeilijk, om de noodige voorwaarden tot op zoodanige hoogte te verwezenlijken, dat men er succes van ziet; en als men met eenige zorg het zwaartepunt in het midden van A' B' C' brengt, zal in den regel het doel bereikt zijn.

Intusschen hebben eenige waarnemingen het vermoeden gewekt, dat de ligging van het zwaartepunt nog iets voordeeliger gekozen

kan worden, dan juist in het steunvlak, en wel door het een weinig *hooger* te brengen, indien namelijk — zooals meestal het geval is — het punt, waaraan men in de allereerste plaats een onveranderlijken stand zou willen verzekeren, boven in het instrument ligt. Dit punt toch — in casu het bevestigingspunt van den fijnen kwartsdraad — maakt, als het zwaartepunt in 't steunvlak ligt, de kleine bewegingen daarvan volkomen mee. Lag echter het zwaartepunt hooger, ergens tusschen 't steunvlak en 't bedoelde punt, dan zou de beweging van dit laatste nagenoeg opgeheven kunnen worden door de nu in het spel komende rotatie om een horizontale as. Het is duidelijk, dat deze compensatie alléén kan geschieden voor de zuiver *opgedrongen* bewegingen; de eigen slingeringen *van* het zwaartepunt en die *om* het zwaartepunt hebben een te zeer verschillende periode om elkaars invloed te kunnen vernietigen.

Of de bedoelde wijziging werkelijk een verbetering genoemd zou mogen worden eischt derhalve nog een nader experimenteel onderzoek, dat echter moeielijk kan geschieden alvorens een toestel beschikbaar is, waarmee men de noodige verplaatsingen van het zwaartepunt geleidelijk en in meetbaar bedrag kan uitvoeren.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Prof. Dr. W. EINTHOVEN te Leiden eene mededeeling aan getiteld: „*Een isolatie-inrichting tegen trillingen der omgeving*".

Een aantal onderzoekingen, die met behulp van LIPPMANN's capillair-electrometer in mijn laboratorium zijn verricht, werden in het begin bemoeilijkt door trillingen der omgeving. Later werd beproefd, het werktuig te isoleeren door het te laten drijven op kwik.

Laat men een bakje met kwik, *A*, drijven in een grootere, eveneens met kwik gevulde schaal, die op een vasten pijler is geplaatst en plaatst men op denzelfden pijler naast de schaal een tweede bakje, *B*, dat zooveel mogelijk aan *A* gelijk en gelijkvormig is en met even veel kwik is gevuld, dan neemt men waar, dat de rimpeling van het kwikoppervlak in *A* zeer veel geringer is dan in *B*. Dit verschijnsel deed mij verwachten, dat ieder op kwik drijvend voorwerp, van welken vorm dan ook, in vrij hooge mate van de trillingen der omgeving geïsoleerd zou zijn. Verder lag het vermoeden voor de hand, dat de isolatie des te volkomener zou zijn, hoe grooter de massa was van het drijvende voorwerp. Met de bedoeling, den capillair-electrometer met een statief en een microscoop

te zamen op één vlak te laten drijven, liet ik de volgende, op eenigszins groote schaal berekende inrichting maken.

Een vierkant ijzeren raam drijft in een met kwik gevulde ijzeren goot. De afmetingen van het raam zijn: de buitenzijde 60 cM., de binnenzijde 30 cM., de dikte 9 cM; het gewicht is 170 KG. De afmetingen van de goot zijn zóó gekozen, dat het raam er in past en aan alle kanten nog 1 cM. ruimte overlaat. De wanddikte der goot bedraagt 1 cM.

De geheele inrichting wordt op een pijler geplaatst, een kwikbakje *A* op het ijzeren raam en een kwikbakje *B* naast de goot direct op den pijler. De verwachtingen werden te leur gesteld. Het bleek duidelijk, dat de trillingen van *A* niet geringer waren dan die van B.

Om de oorzaak hiervan op te sporen, werd een reeks van proeven genomen, waarbij voorwerpen van allerlei vorm en grootte en van verschillend materiaal op kwik drijvende werden gehouden, terwijl bovendien de omstandigheden onder welke zij dreven, zoo veel mogelijk werden gevarieerd. Om de trilling der drijvende voorwerpen te beoordeelen, werd steeds gebruik gemaakt van een kwikoppervlak, welks rimpeling met het bloote oog moest worden geschat. Vooral door onmiddellijke vergelijking met een tweede kwikoppervlak, is die schatting vrij goed uitvoerbaar, terwijl de methode aan vlugheid en gemakkelijkheid niets te wenschen overlaat. Het kwik bevindt zich in geslepen glazen bakjes, zooals deze veeltijds bij histologische werkzaamheden worden gebruikt; de kwikoppervlakken zijn rond en hebben een middellijn van ongeveer 5.5 cM.

De proeven leerden, dat de sterkte der trillingen van een op kwik drijvend voorwerp niet beheerscht wordt door de massa van het voorwerp; noch door de stabiliteit, — waaronder wij het moment verstaan, waardoor een drijvend lichaam, dat in een bepaalde, zeer kleine helling gebracht is, naar den evenwichtsstand wordt teruggevoerd —; noch door de grootte van het oppervlak of door den vorm en de lengte van den rand, die met het kwik in aanraking zijn; noch door den afstand van het voorwerp tot den wand van den bak, waarin het drijft; noch eindelijk door de dikte der laag kwik, waarop het drijft. Daarentegen hebben de vorm en het soortelijk gewicht van op kwik drijvende, homogene voorwerpen een grooten invloed op hunne trilling. Terwijl dunne platte platen van glas, ijzer, steen of hout alle ongeveer even sterk trillen, bieden dikkere platen of blokken, bijv. ter hoogte van 7 cM., onderling verschillen aan: een ijzeren blok trilt meer dan een houten. Beide blokken trillen meer dan dunne, platte platen.

De invloed van de verdeeling der massa in niet homogene voorwerpen wordt door de volgende proef aangetoond:

Op het midden van een groot, op kwik drijvend stuk spiegelglas wordt een lang houtblok geplaatst met de lengte-as verticaal. Het bovenvlak van het houtblok wordt met een gewicht bezwaard, waardoor de trillingen van het glas zeer worden vergroot. Plaatst men nu een aantal platte gewichten direct op het glas zelf, waardoor de last, die het draagt, aanzienlijk wordt vermeerderd, dan ziet men de trillingen sterk verminderen.

Hoewel de bovenstaande resultaten misschien bezwaarlijk op eenvoudige wijze mathematisch kunnen worden uitgedrukt, valt het toch niet moeilijk, er de eischen uit te leeren kennen, waaraan ieder drijvend voorwerp moet voldoen, wil het zoo goed mogelijk tegen de trillingen der omgeving zijn geïsoleerd. Wenscht men bijv. verschillende werktuigen te isoleeren, dan bevestige men ze aan een drijvende plaat, wier gewicht bepaald wordt door het gewicht en den vorm der werktuigen zelve. Zijn deze laag en licht, dan kan de drijvende plaat ook licht zijn; zijn de werktuigen daarentegen hoog en zwaar, dan moet ook de drijvende plaat zwaar zijn. Wenscht men den plaatvorm te behouden en de dikte der plaat zoo min mogelijk te doen toenemen, dan kan de verzwaring alleen worden verkregen: 1° door vergrooting der vlakte-afmetingen, 2° door de keuze van een materiaal van hoog soortelijk gewicht. Dit laatste schaadt niet, zoolang slechts aan den plaatvorm geen afbreuk wordt gedaan.

De thans door mij gebruikte isolatie-inrichting bestaat uit een vierkante ijzeren plaat van 1 M. zijde en 11 millim. dikte. Een zwaar microscoop en een statief voor den capillair-electrometer zijn zóó op de plaat bevestigd, dat hunne zwaartepunten zoo laag mogelijk komen te liggen. De plaat zelve drijft in een vierkanten hardsteenen bak, die een zijde van 1.04 M. en een diepte van 2 cM. heeft, terwijl de dikte der laag kwik, waarop de plaat rust, ongeveer 1 millim. bedraagt. Uit deze gegevens laat zich berekenen, dat er voor de geheele inrichting ongeveer 3,8 Liter kwik, — het eenige kostbare materiaal, — benoodigd is. Wanneer niet opzettelijk tegen den pijler gestooten wordt of eenige andere, bijzondere oorzaak voor trilling werkzaam is, zijn de rimpelingen in een kwikbakje, dat op de plaat is gezet, nauwelijks zichtbaar; is er een bijzondere oorzaak werkzaam, dan worden zij een weinig vergroot, doch zij zijn zeer spoedig weer gedempt. De grootte der rimpelingen kan men objectief beoordeelen wanneer men in het kwikoppervlak gespiegelde voorwerpen photographeert. Hoe sterker de rimpelingen zijn, des te doffer wordt het photogram.

De inrichting is thans reeds bijna twee jaar in gebruik en beantwoordt geheel aan de gekoesterde verwachtingen. Het arbeiden met den capillair-electrometer wordt thans nimmer meer gestoord door de trillingen der omgeving, bijv. veroorzaakt door het passeeren van een voertuig of door het stooten van eene in de nabijheid van het laboratorium staande stoommachine.

Niettegenstaande bij 800-voudige vergrooting wordt gephotographeerd, is geen spoor van trilling in de verkregen krommen te bemerken.

Ten slotte zij vermeld, dat de ijzeren plaat, aan zich zelve overgelaten, haar plaats in de ruimte onveranderd behoudt en dat het richten van het drijvende microscoop en het scherp instellen op den meniscus van den capillair-electrometer zeer gemakkelijk geschiedt en geen de minste vertraging veroorzaakt.

De methode, om werktuigen te laten drijven op kwik is reeds toegepast door MICHELSON en MORLEY, — the American journ. of Science [3] 34, — die daarbij echter een zeer bijzonder doel hadden. Een kijker en eenige spiegels waren in een horizontaal vlak opgesteld en moesten ten opzichte van elkaar absoluut onbewegelijk blijven, niettegenstaande zij te zamen 90° en meer om een verticale as werden gedraaid. Een groote, ongeveer 17 00 KG. zware steen was bevestigd op een houten ring, die in kwik dreef. Uit de afmetingen, door de Amerikaansche onderzoekers gepubliceerd, kan men berekenen, dat het zwaartepunt der drijvende massa ongeveer 27.5 cM. boven de oppervlakte van het kwik gelegen was. Hieruit laat zich, zooals uit de resultaten der boven beschreven proeven gebleken is, afleiden dat, — moge de inrichting ook geheel aan de bijzondere eischen van MICHELSON en MORLEY hebben beantwoord, een kwikbakje, op den drijvenden steen geplaatst, toch hoogst waarschijnlijk zeer duidelijke trillingen zou hebben vertoond.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. J. P. KUENEN getiteld: „*Invloed van de zwaartekracht op de kritische verschijnselen van enkelvoudige stoffen en van mengsels*".

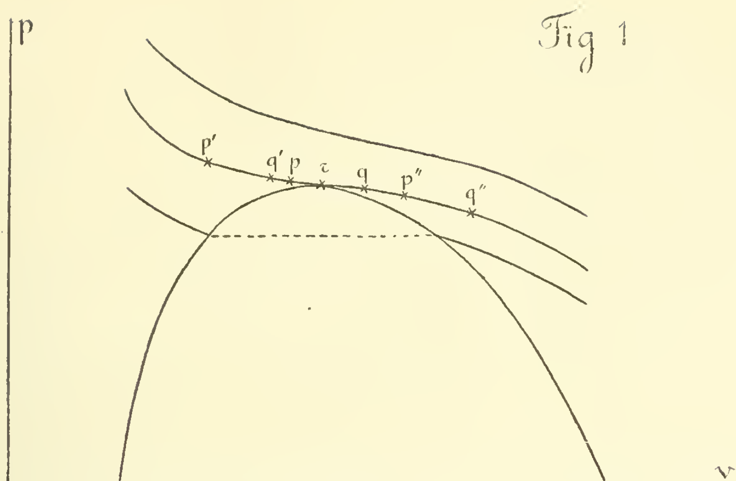
Dat de zwaartekracht in het kritisch gebied eener stof, ten gevolge van de groote samendrukbaarheid, een belangrijken invloed moet uitoefenen, werd door GOUY [1]) opgemerkt. Die invloed bestaat daarin,

[1]) GOUY, Comps. Rend. 115, p. 720—22.

dat de dichtheid der stof, op verschillende hoogte in een buis, aanmerkelijke verschillen vertoont. Zooals altijd, worden de gelijktijdige veranderingen van den druk p en de hoogte h bepaald door de betrekking $dp = -\frac{1}{v}\, g\, dh$, waar v het volume en g de versnelling van de zwaartekracht voorstelt; maar aan een kleine waarde van dp beantwoordt in de buurt van het kritisch punt een groote waarde van dv. Voor een quantitatieve bepaling moet men den vorm der isothermen in het bedoelde gebied nauwkeurig kennen. GOUY heeft eenige berekeningen uitgevoerd voor koolzuur, met behulp van de toestands-vergelijking van SARRAU voor dat gas; en de zoo verkregen uitkomsten neergelegd in een tabelletje.

In de graphische voorstelling van het gedrag eener stof met p en v als coördinaten, vindt de groote samendrukbaarheid hare uitdrukding in de geringe stijging der isothermen $\left(\frac{dp}{dv}\text{ klein.}\right)$ De toestanden der stof, die in een vertikale kolom boven elkander voorkomen, worden voorgesteld door eenige opvolgende punten eener isotherme, te zamen een klein stuk eener isotherme vormende. Terwijl dit lijntje op verren afstand van het kritisch punt zeer kort is en voor hoogteverschillen, zooals die bij proeven te pas komen, bijv. 10 à 20 c.M., met één punt gelijk gesteld mag worden, verkrijgt het lijntje bij het kritisch punt een merkbare afmeting. Zoo volgt uit de tabel van GOUY, dat bij de kritische temperatuur, in de buurt van het kritisch punt, aan een hoogteverschil van 10 c.M. een dichtheidsverschil van 6% beantwoordt en met een hoogteverschil van 20 c.M. zou een dichtheidsverschil van $\pm\ 10\%$ overeenkomen. Bij eenzelfde temperatuur en eenzelfde gemiddeld volume van de stof, is de lengte van het lijntje, en dus het aantal phasen, dat zich boven elkander in evenwicht bevindt, nog slechts afhankelijk van de hoogte van de kolom, en deze hangt op eenvoudige wijze met de hoeveelheid stof en de wijdte der proefbuis samen.

Stel, dat men het volume der stof constant houdt en men de temperatuur langzaam laat dalen naar de kritische temperatuur toe. Het gemiddeld volume blijft bij de daling volgens de onderstelling hetzelfde. Het lijntje wordt langer, omdat de helling der isothermen afneemt en het midden van het lijntje zal een kleine verschuiving in de richting der v-as ondervinden, omdat de verdeeling der dichtheden boven en beneden het midden niet symmetrisch is. Er kunnen zich nu drie gevallen voordoen: wanneer de temperatuur tot de kritische gedaald is, kan het lijntje òf links van het kritisch punt liggen (geval A. p' q' in fig. 1), òf het kan rechts daarvan liggen



x=1 ← x as. x=0

Zwaartekrachtslijnen.

p lijn

P

R

-p lijn

v as →

2de stof M_2

v as →

1ste stof M_1

Fig 2

(geval *B*. p'' q''), òf wel het kritisch punt kan op het lijntje zelf gelegen zijn (geval *C*. $p\ r\ q$). In gevallen *A* en *B* zal de stof nog homogeen zijn. Eerst door verdere daling der temperatuur zal het lijntje met een nijver uiteinde (in geval *A* met q', in geval *B* met p'') de zoogenaamde grenslijn, die ook in de figuur is aangegeven, treffen. Wanneer dit gebeurt, komt (vertragingsverschijnselen buitengesloten) een uiterst kleine hoeveelheid eener tweede phase te voorschijn: in geval *A* ontstaat boven in de buis, beantwoordende aan het punt q', een kleine hoeveelheid damp, in geval *B* daarentegen een spoor vloeistof onder in de buis, beantwoordende aan punt p'' van het lijntje. Gaat de temperatuurdaling voort, zoo nemen die hoeveelheden damp, resp. vloeistof, van nul af, toe. De toestanden, die dan in de buis aanwezig zijn, worden voorgesteld door twee lijntjes, het eene aansluitende aan de vloeistof naar links, het andere aan den damp naar rechts. Dat wil zeggen, van het punt der proefbuis uit, waar het scheidingsvlak tusschen de coëxisteerende vloeistof en damp zich bevindt, zullen de phasen naar beneden toe in dichtheid toenemen, naar boven toe afnemen. De zwaartekracht brengt geen verandering in de phasen, die bij elke temperatuur in everwicht verkeeren, d. i. aan het scheidingsvlak elkaâr aanraken. Ligt de temperatuur belangrijk beneden de kritische, zoo neemt de lengte der lijntjes af, en spoedig kunnen zij praktisch met de twee punten der grenslijn op gelijke hoogte gelegen, gelijkgesteld worden. Met een gegeven hoeveelheid stof, in een proefbuis boven kwik afgesloten, kan men de verschillende gevallen natuurlijk verwezenlijken door het geheele volume, waarbij men de temperatuur-verandering doet plaats hebben, eerst te kiezen een eind beneden het kritisch volume (geval *A*), daarna een eind boven het kritisch volume (geval *B*). Wat gebeurt er, indien het volume vlak in de buurt van het kritisch volume ligt (geval *C*)? Bij de kritische temperatuur zal een der phasen, op zekeren afstand van de uiteinden der buis gelegen, juist de kritische dichtheid hebben; hieraan beantwoordt punt 2, waar de isotherme de grenslijn aanraakt. Onmiddellijk onder de kritische temperatuur moet in *dat* punt van de buis een meniscus te voorschijn komen. De plaats in de buis, waar dit gebeurt, hangt van het gekozen volume af. Derhalve: tusschen twee grenzen van volume in, waarvan men het bedrag voor ieder geval uit de hoogte der kolom en den vorm der isotherme kan gaan berekenen, zal bij temperatuurdaling een aanvankelijk vlakke en nevelachtige meniscus ergens in de buis te voorschijn komen en, zoools uit het bovenstaande blijkt, steeds volkomen nauwkeurig bij dezelfde temperatuur, n.l de kritische temperatuur. Voor koolzuur zou bij een hoogte van 10

c.M. volgens de tabel van GOUY het verschil dier grenzen, waartusschen de meniscus kan te voorschijn komen, ongeveer 6% van het geheele volume bedragen. Van die orde was ook het verschil, zooals het zoowel door GOUY zelf [1]), als door mijzelven [2]) werd waargenomen.

Onmiddellijk volgt hieruit, wat bij het omgekeerde proces, verwarming bij constant volume, in verschillende gevallen te zien zal zijn. Is het volume der stof beneden een zekere grens v_1 gelegen, zoo zal de vloeistof geregeld toenemen en eindelijk bij een temperatuur beneden de kritische temperatuur de geheele ruimte vullen; ligt het volume boven een ander volume v_2, zoo zal de vloeistof afnemen en geheel verdampen. Tusschen v_1 en v_2 echter zal de meniscus wel min of meer rijzen of dalen, maar eindelijk bij bepaalde temperatuur, onafhankelijk welk volume tusschen v_1 en v_2 de stof inneemt, vlak worden en verdwijnen. *Die temperatuur is de kritische* en geen andere.

Deze uitkomst werd door mij vroeger reeds eenmaal zonder nadere toelichting vermeld. [3]) Ze rechtvaardigt volkomen de zoogenaamde optische methode tot het bepalen van kritische temperaturen. Hetzelfde geldt voor de methode, zooals ze oorspronkelijk door ANDREWS beschreven werd, waarbij in plaats van temperatuurverandering bij constant volume, voluumverandering bij constante temperatuur plaats heeft, ofschoon de eerste om praktische redenen mij toeschijnt de voorkeur te verdienen. Bij volkomen zuivere stoffen moet vooral deze juiste waarden voor de kritische temperatuur opleveren en verschillen, met uitkomsten volgens andere methoden verkregen, vinden hun oorzaak in onzuiverheden of in vele gevallen in onzekerheid der concurreerende methoden. De methode der dichtheden (MATTHIAS) [4]), die kan dienen om het kritisch volume te bepalen, indien de kritische temperatuur reeds is vastgesteld, verdient voor de bepaling der kritische temperatuur zelve i. h. a. geen aanbeveling, omdat hierbij veelal belangrijke extrapolatie moet geschieden, tenzij ze met bijzondere zorg wordt toegepast. [5]) In elk geval, welke methode men ook toepast, zal het wel steeds noodig zijn de stof dooreen te roeren,

[1]) GOUY, Compt. Rend. 116 p. 1289.

[2]) KUENEN, Verslagen Kon. Akad. 1893/94. p. 88.

[3]) KUENEN, Versl. Kon. Akad. 1893/94. p. 87.

[4]) CAILLETET et MATTHIAS, Compt. Rend. 102 p. 1202, 104 p. 1563.

[5]) AMAGAT, Compt. Rend. 114 p. 1093—98.

[6]) CHAPPUIS, Compt. Rend. 118 p. 976—977.

omdat onzuiverheden nimmer geheel ontbreken en deze belangrijke vertraging en ook dichtheidsverschillen ten gevolge hebben. [1])

Het moge nog worden opgemerkt, dat de besproken methode tegelijkertijd in staat stelt den kritischen druk en in groote benadering ook het kritisch volume der stof te bepalen. Men zal geen groote fout maken, indien men als kritisch volume der stof neemt, dat volume, waarbij de meniscus in het midden der buis te voorschijn komt, resp. verdwijnt.

Veelal heeft men gemeend bij dergelijke bepalingen als kritisch volume te moeten aannemen het volume, waarbij de meniscus boven in de buis vlak werd en verdween en hiervan zijn somtijds groote fouten het gevolg geweest.

II. Om den invloed der zwaartekracht op de kritische verschijnsels van mengsels van twee stoffen op te sporen, zal ik gebruik maken van het ψ vlak van VAN DER WAALS. [2]) (Ik beschouw slechts het geval, dat alleen de dwarsplooi op het oppervlak voorkomt). Op bladzijde 35 verv. van zijn verhandeling wordt het geval behandeld, dat op het mengsel uitwendige krachten werken. De daar verkregen resultaten behoeven dus slechts te worden toegepast. Men kan het ψ vlak beschrijven hetzij voor een bepaald gewicht van het mengsel, hetzij voor een bepaald aantal moleculen van het mengsel. In het geval, dat hier behandeld wordt, verdient, wat de eenvoudigheid betreft, het eerste de voorkeur. Er wordt n.l. bewezen [3]), dat in dat geval voor phasen, die onder den invloed der zwaartekracht met elkander in evenwicht zijn, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_v$ [4]) een constant bedrag heeft, terwijl in het andere geval $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_v$ nog van de hoogte h afhangt en $\left(\frac{\psi}{\partial x}\right)_v + (M_2 - M_3)\, g\, h$ (M = mol. gewicht) constant is. We gebruiken dus liever het eerste vlak, om met behulp van het oppervlak uit te drukken, welke phasen boven elkander kunnen liggen, denken we ons op het oppervlak lijnen beschreven, waarvoor $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_v$ een constant bedrag heeft. Die lijnen zal ik noemen „zwaartekrachts-

---

[1]) Verslagen Kon. Akad. 1893/94 p. 85 verv. 1894/95 p. 19 verv. p. 57 verv.

[2]) ARCHIVES, Neêrl. 24 p. 1—56.

[3]) l. c. p. 35, 36.

[4]) x = Samenstelling, de v drukt uit, dat bij de differentiatie v constant gehouden wordt.

lijnen." De phasen, die boven elkander in een verticale buis, waarin zich een mengsel bevindt, voorkomen, vormen te zamen een stuk van zulk een zwaartekrachtslijn, evenals bij een enkele stof van een isotherme. Voor een enkelvoudige stof valt n.l. de zwaartekrachtslijn, om licht verklaarbare redenen, met de isotherme samen. Er bestaat een tweede voorwaarde, die in staat stelt aan te geven, welke punten van de zwaartekrachtslijn aan bepaalde hoogten in de buis beantwoorden. Deze voorwaarde is eenvoudig $dp = -\frac{g}{v}\, dh$, die ook zonder de thermodynamische afleiding in zich zelve duidelijk is. Denkt men zich dus op het oppervlak behalve de zwaartekrachtslijnen ook de druklijnen, isopiesten $\left\{ p = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)_{x} = \text{constant} \right\}$ beschreven, wier bepaling parallel loopt met die der zwaartekrachtslijnen, dan stellen deze twee stellen van kromme lijnen op het oppervlak volkomen in staat de aanwezige phasen in de buis aan te geven. Voor ons doel is het voldoende, den loop in het kritisch gebied na te gaan. We komen snel tot dit doel, zoo we gebruik maken van de betrekking tusschen dp aan de eene en dx (of dv) op de zwaartekrachtslijn aan de andere zijde. Dit verband wordt aangewezen door een formule op pag. 37 der verhandeling van VAN DER WAALS. Deze luidt:

$$\left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2} - \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial v}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}} \right\} dx = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p dp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

of ook met behulp van bekende betrekkingen:

$$\left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial v}\right)^2 \right\} dx = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v dp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Noemen wij ter bekorting:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial v}\right)^2 = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

dan is A, zooals bekend is, de vorm, die met $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$ en $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ over de stabiliteit beslist. Op de connodale lijn is overal $A > 0$ behalve in het plooipunt, als punt van de spinodale lijn, waar $A = 0$ substitueeren we dit in (1) of (2) dan moet, omdat in het plooipunt in

het algemeen $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p$ of $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v \gtrless 0$, $\frac{dp}{dx} = 0$ of $\frac{dx}{dp} = \infty$.

Dit beteekent niet anders, dan dat in het plooipunt een element van de isopiest ($dp = 0$) samenvalt met een element van de zwaartekrachtslijn. Daar de isopiest de connodale lijn in het plooipunt aanraakt, moet de zwaartekrachtslijn dat evenzeer doen. In figuur 2 is het geval geteekend, dat het plooipunt naar de zijde van de kleine volumes gelegen is. De druk in het plooipunt is dan, zooals bekend is, een maximumdruk en

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p > 0 \quad \text{of} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v > 0$$

zoowel in het plooipunt zelf als vlak daarbij. Daar A tevens > 0 hebben dx en dp volgens (1) en (2) tegengesteld teeken en zullen isopiest en zwaartekrachtslijn elkander snijden, op de wijze, zooals fig. 2 dat aangeeft. Twee krommen, die elkaar snijden en tevens aanraken, hebben een onderlinge aanraking van de tweede orde. Daaruit volgt, dat in de v—x projectie niet slechts $\frac{dv}{dx}$ voor beide lijnen in het plooipunt overeenstemt, maar evenzeer $\frac{d^2v}{dx^2}$. De twee lijnen hebben derhalve gelijke kromtestraal.

Het bewijs van deze stelling laat zich ook aldus geven. De twee aan twee bijeen behoorende punten der connodale lijn hebben de eigenschap, dat zoowel $\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)_x$ als $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_v$ voor beide dezelfde waarde hebben. Het eerste kan men ook uitdrukken door te zeggen, dat de druk in beide punten even groot is. Nadert men tot het plooipunt, dan naderen de bijeen behoorende punten tot elkaâr, om in het plooipunt samen te vallen. Daaruit leidt men onmiddellijk af, dat de druklijn in P met de connodale lijn een element gemeen heeft, of wel haar aanraakt. Volkomen hetzelfde geldt echter om dezelfde reden voor de lijn, waarvoor $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_v$ constant is, d. w. z. voor de zwaartekrachtslijn. En omdat de beide lijnen elkaar moeten snijden, zal haar aanraking van de tweede orde zijn; dus $\frac{d^2v}{dx^2}$ voor beide gelijk.

Men behoeft dus $\frac{d^2 v}{dx^2}$ slechts voor één der twee lijnen te bepalen, om ook dezelfde grootheid voor de andere te kennen. We zullen nemen $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$, dus voor de isopiest of druklijn.

Uit $dp = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v dx + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_x dx$ volgt:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p = -\frac{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial v}}{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2}}$$

Daar voorts voor een willekeurige functie φ

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_p = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_v + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_x \times \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p$$

vindt men:

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p = \frac{-\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)^2 \dfrac{\partial^3\psi}{\partial x^2\,\partial v} + 2\,\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial v}\,\dfrac{\partial^3\psi}{\partial x\,\partial v^2}\,\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - \left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial v}\right)^2 \dfrac{\partial^3\psi}{\partial v^3}}{\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)^3}$$

Hierin kunnen we invoeren de grootheid N uit (3). Gemakkelijk vindt men dan:

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p = -\frac{\left(\dfrac{\partial A}{\partial v}\right)_k}{\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)^2} + \frac{\dfrac{\partial^3\psi}{\partial v^3}}{\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)^2} A$$

Deze vorm is algemeen geldig. Zij kan ook worden gebruikt om den loop der p-lijnen in de v, x-projectie te bepalen. In P echter is nu $A = 0$, terwijl $\frac{\partial A}{\partial v} < 0$, omdat een verschuiving van P uit in de richting van de positieve v-as naar het labiele gebied gericht is. Dus wordt in het plooipunt

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_p = -\frac{\left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_x}{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right)^2} > 0 \text{ [1]}$$

d. w. z. de kromming van isopiest en zwaartekrachtslijn is gericht naar dezelfde zijde als die van de connodale lijn.

Een dergelijke redeneering kan gebruikt worden, om de onderlinge ligging der lijnen vast te stellen in het geval, dat het plooipunt aan de zijde der groote volumes ligt. Dan wordt $\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)_p < 0$, omdat $\frac{\partial A}{\partial v} > 0$ en het blijkt, dat de kromming weder van hetzelfde teeken is als die van de connodale lijn in het plooipunt.

Nog een enkel woord omtrent het tweede ψ vlak, beschreven voor constant aantal moleculen, in den aanvang reeds vermeld. Men kan de voorwaarden, die hierop betrekking hebben, afleiden uit die welke voor het eerste gelden door de substituties:

$$\psi = \frac{\psi'}{M_2(1-x') + M_2 x'} \qquad \nu = \frac{\nu'}{M_2(1-x') + M_2 x'}$$

$$x = \frac{M_2 x^2}{M_2(1-x') + M_2 x'}$$

waarin de accenten het tweede vlak aanduiden. Men kan ze even goed onafhankelijk opstellen. Zooals gezegd werd, wordt het systeem formules minder eenvoudig. In plaats van (1) verkrijgt men bijvoorbeeld: [2])

$$\left\{\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} - \frac{\left(\frac{\partial x' \partial v'}{\partial^2 \psi'}\right)}{\frac{\partial^2 \psi'}{\partial v'^2}}\right\} dx' = -\left\{\left(\frac{\partial v'}{\partial x'}\right)_{p'} + \frac{M_1(1-x') \, 1 \, M_2 x'}{(M_1 - M_2) v'}\right\} dp'$$

[1]) Het denkbeeld om het teeken van $\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)_p$ in het plooipunt na te gaan, ontleende ik aan een brief van Prof. VAN DER WAALS over mijn aan de Physical Society (London) medegedeeld onderzoek.

[2]) VAN DER WAALS l. c. p. 12 door te stellen $P_1 = P_2 = gh$.

Het teeken van het tweede lid is nu in het algemeen niet aan te geven. Het zeer bijzondere geval, dat de coëfficient $= 0$ is, buitengesloten, blijft de gevolgtrekking ten opzichte van het plooipunt natuurlijk dezelde. Is $M_1 > M_2$, zooals bij chloormethyl en koolzuur, dan is de coëfficient nog positief; maar dit behoeft niet zoo te zijn. Bij zeer groote volumes, waar $\left(\frac{\partial v'}{\partial x'}\right)_{p'}$ ongeveer nul is, wordt het teeken geheel door $M_1 - M_2$ bepaald, maar bij het plooipunt, waar $\left(\frac{\partial v'}{\partial x'}\right)_{p}$ gewoonlijk groot zal zijn, is dit niet het geval. In elk bijzonder geval zal dus over het teeken van het tweede lid beslist moeten worden. Trouwens, dit alles doet tot de algemeene conclusie omtrent het plooipunt, waar het voor ons doel op aan komt, niet af.

De bedoelde conclusie is n.l. reeds voldoende om af te leiden, hoe de kritische verschijnselen van een mengsel onder den invloed der zwaartekracht zullen zijn. Het ligt voor de hand de verschijnselen bij een mengsel te beschrijven door aan te geven wat continue volumverandering bij de verschillende temperaturen, die te pas komen, moet opleveren. In het geval, waarvoor fig. 2 geldt, verkrijgt men, zoo de zwaartekracht buiten rekening gelaten wordt, het volgende [1]: tusschen twee bepaalde temperaturen, verschillend voor elk mengsel, de kritische raakpuntstemperatuur τ_R en de plooipuntstemperatuur τ_P, $\tau_R > \tau_P$ zal bij vergrooting van het volume, het punt, dat den toestand van het lichaam voorstelt, de connodale lijn treffen tusschen de punten P en R in. Er heeft dan zoogenaamde retrograde condensatie van de 1ste soort (r. c. I) plaats, d. i. er ontstaat vloeistof, waarvan de hoeveelheid van nul af regelmatig toeneemt en dan weder afneemt, om geheel te verdwijnen. Beneden τ_P is de condensatie normaal, d. w. z. de vloeistofmeniscus verschijnt aan het boveneinde der buis en de hoeveelheid neemt af tot nul toe, alles bij langzame volumevergrooting. Alleen bij de plooipuntstemperatuur gaat het punt op het oppervlak door het plooipunt heen en zal een vlakke menieus ergens in het midden der buis te voorschijn komen, die bij verdere volumvergrooting daalt en intusschen zich scherper gaat afteekenen, totdat de vloeistof verdampt is.

Nemen we nu de zwaartekracht in aanmerking: de toestand der stof wordt niet meer voorgesteld door één punt, maar door een

[1]) KUENEN o. a. Verslagen Kon. Akad. 1892/93 p. 15—19.

lijntje, een stuk van een zwaartekrachtslijn. De lengte daarvan hangt, evenals bij een enkelvoudige stof, met de hoogte der kolom samen. De waarden van x en v in de verschillende punten der buis liggen aan weerszijden van de gemiddelde waarden van die grootheden voor de geheele hoeveelheid. De gemiddelde waarde van x blijft natuurlijk constant bij de voluumverandering. Let men op den loop der zwaartekrachtslijnen, waarvan er enkelen in fig. 2 gestippeld zijn aangegeven, dan ziet men, dat er zich weder 3 gevallen kunnen voor doen. Indien de temperatuur een bepaald bedrag beneden τ_P gelegen is, zal het lijntje met zijn linker uiteinde, beantwoordende aan den top van de buis, de connodale lijn treffen rechts van P. Er ontstaat een meniscus boven in de buis en de vloeistof neemt regelmatig af (geval A). Het kan ook gebeuren, dat de temperatuur zoover boven τ_P ligt, dat het lijntje met zijn rechter uiteinde de connodale lijn treft en dan wel tusschen P en R. Er ontstaat dan vloeistof beneden in de buis, die toeneemt, een maximum bereikt en daarna afneemt en verdwijnt (geval B). In een temperatuurgebied van bepaalde wijdte om τ_P heen echter, gebeurt iets anders. Het zwaartekrachtslijntje komt dan n.l. rakend met de connodale lijn en wel steeds in P in aanraking (geval C)[2]. Op de plaats in de buis, beantwoordende aan dat raakpunt, bestaan dus plooipuntsdruk, en plooipuntssamenstelling. Op die plaats komt bij volumevergrooting een vlakke meniscus te voorschijn. Alleen een eind boven de plooipuntstemperatuur (van het mengsel in homogeenen toestand) zal de beweging van dien meniscus nog merkbaar het eigenaardige karakter der r. c. I. vertoonen, en het gebied, waarbinnen dat verloop duidelijk zichtbaar is, zal merkbaar kleiner zijn dan indien de zwaartekracht er niet was. Wel moet hierbij in aanmerking genomen worden, dat de temperatuur τ_R ook schijnbaar een weinig verhoogd zal zijn, omdat het lijntje de connodale lijn nog treffen zal, al ligt het midden van het lijntje reeds voorbij de plooi aan de linkerzijde. Maar deze verhooging van τ_R is waar-

---

[1]) Deze lijnen kunnen ook in de plooi worden voortgezet en de stukken er van, begrepen tusschen de connodale lijn, zijn het die te pas komen bij de theorie van de capillariteit van een mengsel.

[2]) Een nauwkeurige beschouwing van de figuur zal doen zien, dat deze drie gevallen de eenige zijn. In die omstandigheid is het zwaartepunt van het betoog gelegen. Nimmer zal het zich bijvoorbeeld kunnen voordoen, dat het lijntje met het uiteinde, dat beantwoordt aan den top van de buis, de connodale lijn tusschen P en R treft, wat tot groote moeilijkheden aanleiding geven zou.

schijnlijk gering, omdat de invloed der zwaartekracht wel het grootst zal zijn bij P.

Bij omkeering van het proces, d. i. bij samendrukking van het mengsel heeft men het volgende: beneden bepaalde temperatuur normale condensatie; dan een gebied, waarin de meniscus onder het samendrukken verdwijnt, voordat alles vloeistof is; vervolgens een gebied, waarin de meniscus vóór het verdwijnen eerst nog min of meer daalt, en eindelijk een gebied, waarin de vloeistof geheel verdwijnt [1]). Dat laatste is eigenlijk het eenige, waarin het typische kritische verschijnsel voor mengsels n.l. de retrograde condensatie volledig te voorschijn komt. Uit een en ander kan de moeilijkheid, die de vaststelling der plooipuntstemperatuur mij vroeger opleverde [2]), grootendeels verklaard worden.

Volkomen analoge verschijnselen zullen het gevolg zijn van de zwaartekracht in het tweede geval, n.l. dat het plooipunt aan de andere zijde van het kritisch raakpunt ligt. Ik zal hier niet bij stilstaan. Ook hier zal de zwaartekracht het gebied, waarin het verschijnsel der retrograde condensatie (hier van de 2de soort r. c. II) duidelijk te voorschijn treedt, min of meer verkleinen. Bij een experimenteel onderzoek, dat ik onlangs heb ondernomen, oorspronkelijk met het doel om het geval der r. c. II te verwezenlijken, van welk onderzoek de resultaten aan de Physical Society te Londen zijn medegedeeld, moet de zwaartekracht hebben medegewerkt om het verschijnsel, waarvan het bestaan overigens kon worden vastgesteld, aan de waarneming te onttrekken. Een omstandigheid, die bij mengsels storend werkt, is deze, dat roeren der stof, hoewel ter eliminatie van vertragingsverschijnselen wenschelijk, aan den anderen kant het zwaartekrachtsevenwicht in het kritisch gebied verstoort, en dus eigenlijk van weinig nut is. Bij enkelvoudige stoffen bestaat dat bezwaar natuurlijk niet.

Physiologie. — De Heer ENGELMANN biedt voor de verhandelingen aan een opstel van den Heer H. J. HAMBURGER: „*Ein Apparat, welcher gestattet die Gesetze von Filtration und Osmose durch strömende Flüssigkeiten bei homogenen Membranen zu studiren.*” De Voorzitter benoemt de Heeren ENGELMANN en PLACE om daarover verslag uit te brengen in de Juni-vergadering.

---

1) Dit resultaat werd door mij met een enkel woord reeds vroeger medegedeeld. Verg. Commun. Lab. of Phys. Leiden, N°. 4 p. 9, noot.

2) KUENEN, Verslagen Kon. Akad. 1892/93 p. 18.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt voor de Verhandelingen aan een opstel van den Heer M. VAN OVEREEM JR: „*De merkwaardige punten van den ingeschreven veelhoek*". De Voorzitter benoemt de Heeren JAN DE VRIES en SCHOUTE om daarover verslag uit te brengen in de Juni-vergadering.

— De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN.

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 29 Juni 1895.

Voorzitter (waarnemend): de Heer J. D. VAN DER WAALS.
Secretaris: de Heer C. A. J. A. OUDEMANS.

Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1⁰. Mededeeling van den Heer VAN DIESEN dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2⁰. Bericht van het overlijden van het Lid der Akademie Dr. A. C. OUDEMANS JR., in leven Directeur der Polytechnische School te Delft. De Voorzitter vindt hierin aanleiding, den overledene in zeer waardeerende woorden te gedenken en een kort overzicht te geven van de onderzoekingen, waardoor zijn naam op wetenschappelijk gebied steeds met eere genoemd zal worden. Zijn heengaan kan, ook voor de Akademie en de wetenschap, een groot verlies worden genoemd.

De Voorzitter deelt mede dat de Commissie voor de Leeuwenhoek-Medaille, die om de 10 jaar verleend wordt, ditmaal is toegewezen aan den Heer L. Pasteur te Parijs.

Wiskunde. — De Secretaris leest namens de Heeren Jan de Vries en Schoute het volgende verslag voor over de verhandeling van den Heer M. van Overeem Jr.: „*De merkwaardige punten van den ingeschreven veelhoek*".

Nadat in de laatste twintig jaren de vroeger op zichzelf staande eigenschappen van merkwaardige punten en cirkels, waartoe de beschouwing van den driehoek aanleiding geeft, door de ontdekking van nieuwe eigenschappen met elkaar in verband gebracht en tot de „moderne" theorie van den driehoek verwerkt waren, lag de vraag voor de hand, of dit nieuwe hoofdstuk der planimetrie, geheel of ten deele, zou kunnen uitgebreid worden tot den veelhoek, of althans tot eene klasse van bijzondere veelhoeken.

Door de onderzoekingen van Tucker, Neuberg en Casey werden de eigenschappen, betrekking hebbende op den „cirkel van Brocard", uitgebreid tot de „harmonische" veelhoeken, dat zijn de figuren, die door inversie uit de regelmatige veelhoeken worden gevonden.

De verhandeling, waarover wij hebben te berichten, bevat de uitbreiding op den ingeschreven veelhoek, van eene reeks van eigenschappen, die in verband staan met de „rechte van Euler" en den „cirkel van Euler" of „negenpuntscirkel".

De „rechte van Euler" draagt het middelpunt O van den omgeschreven cirkel des driehoeks, het snijpunt H der hoogtelijnen, het middelpunt N van den negenpuntscirkel en het zwaartepunt Z; daarbij geldt de betrekking

$$OZ : ON : OH = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1.$$

Met den oorspronkelijken driehoek liggen gelijkvormig de driehoek die de middens der zijden, en de driehoek, die de spiegelpunten van O ten opzichte van die zijden, tot hoekpunten heeft; de gelijkvormigheidspunten vallen samen met Z en N, de middelpunten der omgeschreven cirkels zijn N en H.

Om deze eigenschappen te kunnen uitbreiden op den cyclischen n-hoek, neemt de schrijver n punten aan, die zoodanig op eene door het middelpunt O gaande rechte gelegen zijn, dat hunne afstanden tot O zich verhouden als $\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \ldots \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$. Het eerste

dezer „merkwaardige" punten is het zwaartepunt van in de hoekpunten geplaatste, gelijke massa's.

Uit de n hoekpunten van den cyclischen veelhoek kunnen n cyclische (n—1)-hoeken gevormd worden, die elk aanleiding geven tot het invoeren van (n—1) merkwaardige punten. Door van elken dezer (n—1)-hoeken het k^{de} merkwaardige punt te nemen, verkrijgt men de hoekpunten van een nieuwen cyclischen veelhoek, die met den oorspronkelijken, volgens de verhouding $-\frac{1}{n-k}$ gelijkvormig ligt. De middelpunten der om de nieuwe n-hoeken beschreven cirkels vallen met merkwaardige punten van den oorspronkelijken veelhoek samen, zoodat het centrum van den k^{den} cirkel het $(k+1)^{ste}$ merkwaardige punt is.

Verdeelt men de hoekpunten der oorspronkelijke figuur in twee groepen van *a* en *b* punten, dan bestaat een eigenaardig verband tusschen de merkwaardige punten van den n-hoek en die der *a*- en *b*-hoeken. Dit wordt uitgedrukt door de volgende stelling:

„Alle rechten, die het p^{de} merkwaardige punt van een a-hoek vereenigen met het q^{de} merkwaardige punt van den toegevoegden b-hoek, komen samen in het $(p+q-1)^{ste}$ merkwaardige punt van den n-hoek, en verdeelen elkaar in reden van $(b-q+1)$ en $(a-p+1)$".

Wij wenschen de Afdeeling niet te vermoeien door de opsomming van de vele eigenaardige stellingen, die de schrijver aan het voorafgaande heeft vastgeknoopt.

Wij stippen nog aan, dat de algemeene uitkomsten op den 4hoek, den 5hoek en den 6hoek worden toegepast.

Met het oog op de verdienstelijke bewerking der door den schrijver verkregen uitkomsten, stellen wij U voor, zijn arbeid op te nemen in de werken der Akademie.

Delft. JAN DE VRIES.
Groningen. P. H. SCHOUTE.

De conclusie van het rapport wordt goedgekeurd.

Physiologie. — De Heeren ENGELMANN en PLACE brengen het volgende verslag uit over de verhandeling van Dr. H. J. HAMBURGER: *„Ein Apparat, welcher gestattet die Gesetze von Filtration und Osmose strömender Flüssigkeiten bei homogenen Membranen zu studiren.*

De verhandeling van Dr. H. J. HAMBURGER, waarover de ondergeteekenden de eer hebben rapport uit te brengen, is getiteld:

„Ein Apparat, welcher gestattet, die Gesetze von Filtration und Osmose strömender Flüssigkeiten bei homogenen Membranen zu studiren.”

Zij bevat de beschrijving, afbeelding en gebruiksaanwijzing van een toestel, door den heer HAMBURGER geconstrueerd naar aanleiding der vraag, of de verschijnselen van resorptie van vloeistoffen, in holten van het organisme ingespoten of daarin opgehoopt, de bijzondere eigenschappen der georganiseerde cellen voor hun totstandkomen eischen.

De zoogenaamde vitale eigenschappen der cellen zijn hier — dit heeft Dr. HAMBURGER in eene vroegere verhandeling[1]) bewezen — niet beslissend, want de genoemde resorptie heeft ook bij dieren nog plaats, die sedert 24 uren en langer dood zijn en bij welke bovendien de cellen in de wanden der resorbeerende holten langs thermischen of chemischen weg van hare levenseigenschappen waren beroofd. Maar het was mogelijk, dat de specifieke postmortale structuur der resorbeerende elementen verantwoordelijk moest worden gemaakt. Dr. HAMBURGER wenschte daarom experimenteel na te gaan of soortgelijke resorptieverschijnselen ook aan homogene *kunstmatige* membranen konden worden voortgebracht.

De vroeger voor de studie der vochtbeweging door membranen gebruikte hulpmiddelen konden niet in aanmerking komen, deels wegens de onvoldoende stevigheid, deels wegens andere ongeschiktheid (b.v. semipermeabiliteit) der gebezigde membranen. Dr. HAMBURGER heeft de bezwaren overwonnen, door gebruik te maken van buizen van fijn metaalgaas, waarvan de mazen, door voorbijgaand indompelen in een oplossing van gelatine, gelatine-agar of collodium met een homogene membraan worden overtrokken en gesloten. Een zoodanige buis wordt waterdicht bevestigd in een wijdere glazen buis en beiden kunnen afzonderlijk met gelijke of verschillende vochten worden gevuld of er van doorstroomd worden. In beide buizen kan zoowel de drukking als de snelheid van het vocht binnen ruime grenzen gevariëerd en gemeten worden.

Uit eenige proeven, aan 't slot medegedeeld, blijkt, dat het apparaat voor het doel, waarmede het werd vervaardigd, in hooge mate geschikt is en zeker niet weinige belangrijke vraagstukken, de vochtbeweging door homogene membranen betreffende, zal veroorloven op te lossen.

---

[1]) Ueber die Reglung der osmotischen Spannkraft van Flüssigkeiten in Bauch- und Pericardialhöhle. Ein Beitrag zur Kenntniss der Resorption. Verhand. d. K. Akad. v. Wet. Afd. Natuurk. 2e S. Dl. VI. N°. 6. 1895.

De ondergeteekenden bevelen daarom de verhandeling aan ter opneming in de werken der K. Akademie.

Utrecht en *Amsterdam*, 25 Juni 1895.

Th. W. ENGELMANN.
T. PLÁCE.

De conclusie van het rapport wordt goedgekeurd.

Aardkunde. — De Heer MARTIN doet eenige mededeelingen over het tertiair van Java en over mesozoïsche lagen van Borneo.

Een groot aantal versteeningen van Java, die met het oog op de geologische opneming van het eiland door den Heer VERBEEK werden verzameld, zijn door spreker beschreven in een werk, getiteld „Die Fossilien von Java", waarvan hij Heft 2—5 aan de vergadering overlegt. Hoewel nu dit werk nog verre van voltooid is, laten zich toch reeds uit de tot nu toe beschreven versteeningen enkele algemeene gevolgtrekkingen afleiden, die voor de geologische kennis van Java van belang zijn, die echter in de genoemde monographie nog niet konden worden opgenomen.

Wanneer men van de lagen, die een voldoend aantal versteeningen hebben geleverd, het percentgehalte der daarin voorkomende nog levende soorten berekent, verkrijgt men de volgende uitkomsten:

Quartaire afzettingen komen voor tusschen Bunder en Tjermee in het Oostelijke Java, niet ver van Grissee.

Plioceen werd gevonden bij Sonde, in de residentie Madioen, ten noordwesten van Ngawi, buitendien in de Menengtengkloof, ten zuidoosten van Cheribon. Hoogstwaarschijnlijk moeten hiertoe verder lagen worden gerekend, die in West-Java ontwikkeld zijn, en wel niet ver van de zuidkust bij Bajah, ten noordwesten van de Wijnkoopsbaai, buitendien bij de Kampong Tjikeusik. Laatstgenoemde plaats ligt, evenals Bajah, in Bantam, noordelijk van de T. Panto, en niet ver van de zuidkust van het eiland. Eindelijk moeten tot dezelfde formatie wellicht nog lagen worden gerekend, die westelijk van Cheribon in het district Leuwimoending voorkomen.

Jong-Mioceen is onder het tot nu toe bewerkte materiaal slechts voor 2 plaatsen op Java aan te wijzen, namelijk voor de van ouds bekende vindplaats, die JUNGHUHN met letter O gemerkt heeft en voor Selatjau aan de Tji Longan; maar op beide plaatsen was deze formatie reeds vroeger door spreker aangetoond. Daarentegen is het waarschijnlijk geworden, dat jong-mioceene lagen nog voorkomen tusschen Tjilintoeng en Angsana, op een punt, dat slechts weinig westelijk van de vind-

plaats bij Selatjau gelegen is; verder aan de Tji Talahab, noordelijk van Njaliendoeng, en op eene plaats ten zuiden van Njaliendoeng, die zich 910 M. boven den zeespiegel verheft; eindelijk bij Tambakbatoe, boven Simo, in Oost-Java, zuidwestelijk van Soerabaija.

Gaat men de verspreiding der enkele formatiën na, dan blijkt, dat over 't algemeen de jongere lagen zich telkens aan den buitenkant der oudere hebben gevormd, en er kan geen twijfel over bestaan, dat, sedert den tijd van het jongere mioceen, eene voortdurende en zeer langzame negatieve strandverschuiving plaats had, waardoor achtereenvolgens de jong-mioceene, plioceene en quartaire afzettingen der kust werden drooggelegd. Dat deze strandverschuiving zeer belangrijk was, blijkt uit de 910 Meter boven zee gevonden versteeningen van Njaliendoeng, en dit feit komt ook overeen met hetgeen van Sumatra bekend is, alwaar in de Padangsche bovenlanden neogeene afzettingen tot 1088 M. hoogte worden aangetroffen. Niet lang geleden heeft spreker reeds het bewijs geleverd, dat in het oostelijke gedeelte van den Archipel in het quartaire tijdvak eene belangrijke negatieve strandverschuiving heeft plaats gehad, en tal van feiten toonen aan, dat het geheele gebied van den Indischen Archipel hieraan was onderworpen.

De Heer Martin deelt verder mede, dat hij door den Mijningenieur Wing Easton en door Dr. J. Bosscha interessante versteeningen van West-Borneo ontving. Daaronder zijn vooral ook brokken van *Ammonieten*, en eene soort hiervan behoort tot het geslacht *Perisphinctes* Waag.; buitendien bevinden er zich talrijke, tot drie verschillende soorten behoorende kleppen van *Protocardia* onder en *Corbula sp.* in ongemeen groot getal. Al deze versteeningen zijn in lagen gevonden, die men vroeger oude schiefers noemde, die echter op grond der aangehaalde versteeningen alleen tot de mesozoïsche periode kunnen gerekend worden, en wel moeten deze fossielhoudende lagen òf in de Jura- òf in de Krijtformatie worden gerangschikt. Naar den tegenwoordigen stand onzer kennis is het 't meest waarschijnlijk, dat de bedoelde versteeningen uit Juravormingen afkomstig zijn.

Maar niet alle lagen, die men vroeger „oude schiefers" noemde, zijn van mesozoïschen ouderdom, want, volgens de nieuwere onderzoekingen van Wing Easton, moet de naam „oude schiefers" voor eene formatie worden behouden, waarin tot nu toe geen versteeningen gevonden zijn, en die men scherp van de fossielhoudende, mesozoïsche lagen moet scheiden. Intusschen blijkt meer en meer, dat mesozoïsche lagen in den Indischen Archipel eene zeer groote verspreiding hebben.

Botanie. — De Heer BEYERINCK handelt: „*Over de levensgeschiedenis van Cynips calicis, hare wisselgeneratie en de gallen daarvan*".

Evenals bij vele andere galwespen van den eik, wordt ook hier een wisselgeneratie gevonden, welke echter niet zooals *Cynips calicis* zelve op *Quercus pedunculata* leeft, maar aan *Quercus cerris* gallen voortbrengt en naar deze eigenschap *Cynips cerri* moge genoemd worden. Bij deze reeds op zich zelf merkwaardige eigenschap komt nog de bijzonderheid, dat deze wisselgeneratie zelve dimorph is. Er worden nl. door de *calicis*-wesp in den loop van Maart eieren gelegd zoowel in de vegetatieve knoppen als in de mannelijke katjes van *Quercus cerris*; maar de gallen, welke daarbij ontstaan, zijn verschillend en evenzoo de wespen die daaruit voortkomen. De *gallen in de vegetatieve knoppen* zijn klein, langwerpig, 4 mM. lang en 1 à 2 mM. dik, dunwandig kokervormig, dof grijs van kleur en het insekt komt daaruit in de eerste helft van Mei (omstreeks 8 Mei). De vrouwtjes en mannetjes komen in bijna gelijk aantal voor; zij zijn geheel blinkend zwart gekleurd, met alleen aan de pooten wat bruin. Naar de plaats van het voorkomen der gal, kan dit insekt *Cynips cerri gemmae* worden genoemd. De *meeldraad-gallen* zitten meest bij tweetallen in de mannelijke bloemen; zij zijn in rijpen toestand helder bruin, eenigszins blinkend, glad, kegelvormig, 3 à 3,5 mM. lang en vertoonen, even als de gallen van *Andricus nudus*, waarop zij ook in alle anderen opzichten veel gelijken, aan hun eenigszins kegelvormig versmalden top een donker overblijfsel van een der helmhokjes. De wesp vliegt ook in Mei uit, maar omstreeks 10 dagen later dan *Cynips cerri gemmae*. Het is mij niet gelukt bij dit insekt, dat ik *Cynips cerri staminum* wil noemen, mannetjes te ontdekken. Door de kleinere afmetingen en de lichter bruine kleur, in het bijzonder van pooten en sprietbasis, onderscheidt *C. cerri staminum* zich van *C. cerri gemmae*. Maar het opmerkelijkste verschil tusschen deze twee insekten bestaat in de gedaante der eieren, welke bij *C. cerri gemmae* 0,7 mM. lang zijn en een zijdelings naast den top aangehechten eisteel dragen, terwijl de 0.8 mM. lange eieren van *C. cerri staminum*, evenals bij andere galwespen en bij het moederdier *Cynips calicis*, een eindelingschen eisteel vertoonen. *Cynips cerri staminum* gelijkt zoo zeer op *Andricus burgundus* GIRAUD, en *Cynips cerri gemmae* zoo zeer op *Andricus circulans* MAYR, dat de door GIRAUD en MAYR voor deze dieren opgestelde diagnosen woordelijk op mijne vormen toepasselijk zijn. Intusschen is het mij niet mogelijk geweest de identiteit boven alle twijfel te verheffen, daar, bij de

galwespen, uiterlijke gelijkheid volstrekt niet altijd het recht geeft tot specifieke identiteit te besluiten.

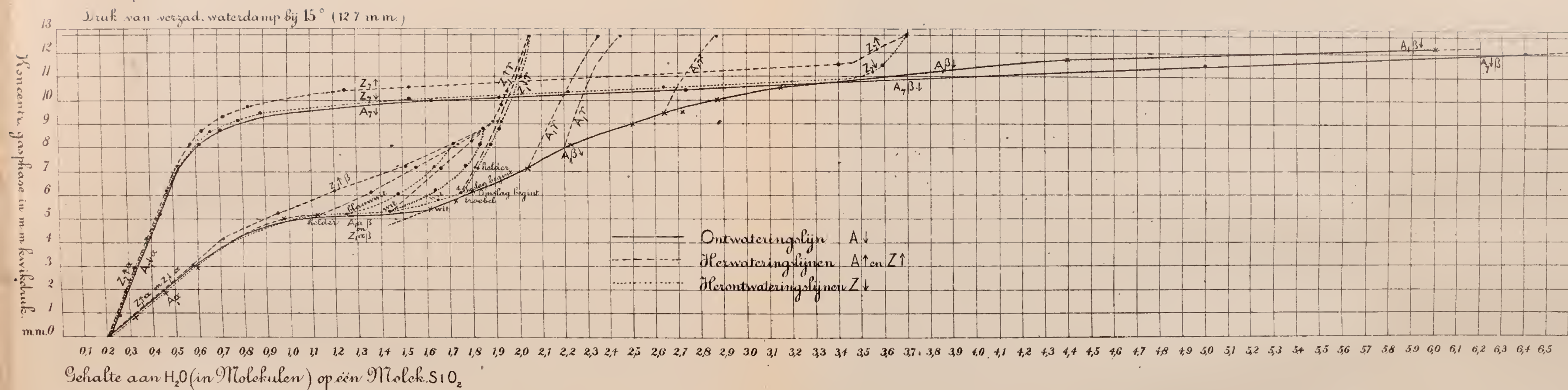
Uit een praktisch oogpunt verdient nog het volgde opgemerkt te worden. De galnoten van *Cynips calicis* komen in den handel voor onder den naam van „knoppers" en zijn bekend als een der allerbeste looimiddelen; zij hebben een looistofgehalte van 20 pCt. Daar zij tegenwoordig in de landen waar zij vroeger algemeen waren meer en meer zeldzaam worden, is de kennis van het feit, dat *Quercus cerris* voor hare ontwikkeling onontbeerlijk is, belangrijk, omdat daardoor een systematische vermeerdering en aanbouw mogelijk wordt gemaakt.

Ten slotte veroorloof ik mij Professor GUSTAV MAYR te Weenen, die mijne *cerri*-wespen en -gallen herhaaldelijk onderzocht heeft, hier openlijk mijn dank aan te bieden. Ook van verschillende andere zijden ondervond ik bij dit onderzoek welwillende medewerking, waarvoor eveneens mijn dank.

Scheikunde. — De Heer VAN BEMMELEN houdt eene voordracht: „*Over de ontwatering, herwatering en herontwatering van het colloïdale kiezelzuur bij* 15° *C.*

In de zitting van 22 Nov. 1892 deelde ik de uitkomsten van een onderzoek mede over de wijze waarop het water in den Hydrogel van $Si\,O_2$ gebonden is, afgeleid uit de geleidelijke afneming van deszelfs dampspanning bij de geleidelijke ontwatering. Daardoor werd meer in bijzonderheden bevestigd, wat ik voor de Hydrogels in 't algemeen in 1888 had aangetoond, dat het water niet chemisch gebonden maar in absorptie-verbinding (vaste oplossing) in den gel aanwezig is. Het was daarbij gebleken dat de gel wijzigingen in zijnen bouw kan ondergaan, die het bindingsvermogen wijzigen, en voorts dat een nog veel nauwkeuriger onderzoek noodig was. De invloed van de vorming van den gel uit meer of minder slappe oplossingen, van deszelfs ouderdom, van den langzameren of snelleren gang der ontwatering, enz., enz. moesten onderzocht worden, bij veel kleinere verschillen van dampspanning, dan vroeger het geval was geweest. Bij die proefnemingen, die een zeer langen tijd [1]) eischten, deden zich eerst zooveel uiteenloopende uitkomsten voor,

[1]) De kortste tijd van blootstelling van eenen gel aan een medium van bepaalde waterdrukspanning was 1—2 dagen. Meestal waren 3 dagen, dikwijls meer dagen odig, soms een maand of maanden.



Lith. Eduard IJdo, Leiden.

dat het een tijdlang scheen als of eene ontwarring der verschijnselen in het geheel niet te bereiken was. Van de uitkomsten, die ik ten slotte verkreeg, wensch ik thans een kort verslag te geven.

Het bleek opnieuw dat de gel als een soort van weefsel is te beschouwen, hetgeen eene groote hoeveelheid water insluit (als de cellen van een plantenweefsel), en om met Naegeli te spreken bovendien water capillair en, nog sterker, micellair gebonden houdt.

Ik heb mij tot de bepaling der Isotherme (p. c) bij 15° bepaald — p de concentratie der gasphase in Mm. kwikdruk — c het watergehalte van den gel. Gels van verschillende bereiding werden onderzocht, namelijk; die uit alkalische, 1, 3, 5, 7 pCt. $Si\,O_2$ oplossing door verdund zoutzuur in geringe overmaat werden afgescheiden . De gel uit de 7 pCt. oplossing ontstond onmiddellijk en was korrelig, niet glasachtig; die uit een 1 pCt. oplossing ontstond binnen eenige uren en vormde een helder glas. (Zie over de uitwassching en verdere behandeling boven zwavelzuur van verschillende sterkte het verslag van 1892).

Zij werden in onderzoek genomen hetzij dadelijk, hetzij een of meer maanden oud, enkele 1, 2, $3^1/_2$ jaren oud.

Om te bekorten noem ik ze naar de bereiding A_1, A_3, A_5, A_7. Het pijltje $\downarrow$ duidt aan de ontwatering — het pijltje $\uparrow$ herwatering, als zij weder aan hoogeren dampdruk werden blootgesteld. Zijn zij boven sterk zwavelzuur ontwaterd geworden, (het gehalte was dan 0,25—0,16 H_2O naar gelang van de ondergane wijzigingen) dan worden zij aangeduid door Z_1, Z_3, Z_5, Z_7 met de pijltjes $\uparrow$ en $\downarrow$, naarmate zij herwaterd of weder herontwaterd werden. De punten van uitgang en die eindpunten zijn aangegeven door druk of gehaltecijfers bij de pijltjes; bijv. $\overset{10}{\underset{6}{\downarrow}}$ duidt aan dat de ontwatering heeft plaats gehad, aanvangende bij een druk van 6 mm., en eindigende bij eenen druk van 10 mm.; het pijltje $\overset{10}{\underset{6}{\uparrow}}$ de herwatering tusschen 6 en 10 mm.

In 't geheel zijn een dertigtal monsters van verschillende bereiding en ouderdom in een negentigtal waarnemingsreeksen onderzocht.

Het verschil tusschen opvolgende drukken bedroeg bij de proeven gewoonlijk 1 mm., maar als het noodig was ook $^1/_2$ tot 0.2 mm., zoodat tusschen den druk van verzadigden waterdamp en sterk zwa-

---

[1]) Het water van de alkalische $Si\,O_2$ oplossing en van het snel toegevoegde verdunde zoutzuur zijn bij de berekening samengeteld.

velzuur wel een dertigtal zwavelzuren van verschillende sterkte gebezigd zijn (zie verslag 1892).

De figuur geeft de isothermische lijnen van ont-, her- en herontwatering (p. c.) aan (de piezo-migmen zou men ze kunnen noemen) voor een monster A_1 versch, en voor een monster A_7 1 jaar oud, welk laatste monster de grootste verschillen met versch bereide A_1 opleverde.

I. De Hydrogel A_1.

De geleiige glasachtigdoorschijnende klompen bevatten oorspronkelijk ± 100 (ja zelfs tot 120) Mol. H_2O op 1 Mol. SiO_2; dit water is grootendeels in het weefsel ingesloten. Door eene krachtige persing tusschen twee poreuse aarden platen wordt het gehalte teruggebracht op ± 20 Molec. De gelei is dan reeds veel steviger geworden. De verdere veranderingen bij de ontwatering van eene gelei tot een hard glas beschreef ik reeds vroeger (Verslag 1892 bladz. 68, 69). Bij een gehalte van ± 6 H_2O is de gel reeds hard en tot fijn poeder te wrijven.

Ontwatering. De lijn is niet aaneengesloten, maar vertoont twee richtingsveranderingen; ik noem de stukken β, $\alpha\beta$, α (zie de fig.). Het eerste met nauwkeurigheid bepaalde punt ligt bij 12.2 mm. (dus $^1/_2$ mm. beneden maximum dampspanning bij 15°) waarbij de samenstelling is: SiO_2 ± 6 H_2O. Omtrent de op $A\beta$ bepaalde punten zij opgemerkt, dat zij de samenstelling aangeven wanneer het waterverlies, in den regel na enkele dagen blootstelling aan eene bepaalde dampspanning, in ééne week beneden 0,1 H_2O gedaald is. Bij voortgezette blootstelling aan dezelfde dampspanning wordt dat verlies steeds geringer, zoodat het geheele verdere verlies na een jaar slechts naar gelang dat de druk lager is, 0,5 tot 0,15 H_2O bedraagt [1]) — zoo bijv. in eene proef bij 12,2 en bij 11,6 mm. 0,5 en 0,3 H_2O na een jaar; daarna bleef het gewicht $1^1/_2$ jaar standvastig. Op de lijnen $A\alpha\beta$, $A\alpha$, en de lijnen Z hieronder behandeld, stellen de bepaalde punten standvastige waarden voor. De lijn $A\beta \downarrow$ heeft een langzaam dalend verloop; doch neemt de helling allengs toe. Tusschen ongeveer 6 en 5,5 mm. en een gehalte van 1,8—1,7 H_2O heeft eene verandering plaats, die ik voortaan den *omslag* zal noemen. Het heldere glas wordt troebel en allengs wit. Dit verschijnsel gaat van één, soms van meerdere punten uit, en breidt zich over den gehee-

[1]) Op dit verlies kom ik op bladz. 69 terug.

len klomp uit. De oudere gel vooral vertoont deze ontglazing sterk; eerst wordt hij blauwachtig, dan porceleinwit, daarna ondoorschijnend wit. De lijn A verandert hare richting en verkrijgt (als α/β) veel geringer helling, zoodat eene dampspanningsvermindering van 0.5 mm. een verlies van ruim 0.6 H_2O teweeg brengt.

Het waterverlies heeft langzaam plaats, maar allengs neemt de troebelheid af en herstelt zich de glashelderheid (des te spoediger naarmate de gel verscher is). Is de samenstelling gedaald tot SiO_2 $\pm$ 1 H_2O, dan neemt de helling der lijn weder toe en nadert eene rechte lijn (gedeelte $A\alpha\downarrow$). Op deze lijn $A\alpha$ worden in betrekkelijk korten tijd standvastige waarden verkregen. Voor $\pm$ 0 8 H_2O verlies in water daalt de druk 4 mm.

Herwatering. Van een punt van $A\beta$ uitgaande wordt slechts 0,2 tot 0.3 H_2O (zelden meer) weder opgenomen; deze lijnen $A\gamma\uparrow$ (die ik als γ onderscheid) hebben een schuin beloop. Drie daarvan zijn in de figuur aangegeven. Dit opgenomen water is zeer zwak gebonden. Van een punt der lijn $A\alpha/\beta$ uitgaande werden lijnen verkregen, die beter later kunnen besproken worden. Van eenig punt der lijn $A\alpha$ uitgaande wordt hetzelfde verkregen als wanneer van het laagste punt van $A\alpha$ wordt uitgegaan (0 mm.) Van dit laagste punt de herwatering aanvangende wordt de lijn α opnieuw doorloopen (dus $Z\alpha\uparrow$), maar bij een gehalte van 6—8 H_2O [1]) verwijdert zich de lijn Z allengs van A en verkrijgt een schuins beloop naar boven, ongeveer evenwijdig aan $A\beta\downarrow$, zoodat het verschil in watergehalte eerst toeneemt, en dan ongeveer standvastig blijft (in de figuur ruim 0.5 H_2O). Ik noem dit stuk $Z\beta\uparrow$. Is de samenstelling 1.8 à 1.9 bereikt, dan verandert de lijn haar beloop. Er ontstaat weder eene γ lijn; het verder opgenomen water is zeer zwak gebonden. Eene hoeveelheid van $\pm$ 2 H_2O is bij 12.67 (verzad. dampsp.) weder opgenomen.

Herontwatering. De γ lijnen van $A\beta$ worden in korten tijd teruggedoorloopen. Van het hoogste punt van $Z\uparrow$ teruggaande wordt met eene kleine afwijking rechts (soms zonder afwijking) de γ lijn teruggeloopen die zich voortzet tot aan het punt (of althans nabij hetzelve) waar bij $A\downarrow$ de omslag heeft plaats gehad. Deze heeft nu opnieuw plaats, hetgeen zeker zeer merkwaardig is. De lijn $Z\alpha/\beta\downarrow$ wordt vervolgens doorloopen die of geheel met $A\alpha/\beta\downarrow$ samenvalt, of althans kort daarboven gelegen is. De glashelderheid komt op-

[1]) Nauwkeuriger is dit niet te bepalen omdat tusschen 3 en 5 mm. het verschil in gehalte nog beneden 0.05 H_2O blijft. De bereikte nauwkeurigheid is $\pm$ 0.025 gemiddeld.

nieuw terug. Vervolgens valt $Z\alpha\downarrow$ geheel samen met $A\alpha\downarrow$, dus ook met $Z\alpha\uparrow$.

Thans moet nog vermeld worden wat geschiedt als *Herwatering* plaats vindt van eenig punt van $A\alpha\beta\downarrow$ of van $Z\alpha\beta\downarrow$ uit, en bij Herontwatering van eenig punt van $Z\beta\uparrow$. In het eerste geval worden weinig gebogen lijnen doorloopen in de richting naar het punt waar $Z\beta\uparrow$ overgaat in $Z\gamma\uparrow$, en vervolgens wordt deze lijn doorloopen; daarna bij herontwatering de lijn $Z\gamma\downarrow$, en na hernieuwden omslag de lijn $A\alpha\beta\downarrow$. De lijn $Z\gamma\downarrow$ kan ook omgekeerd doorloopen worden als men de herwatering aanvangt van eenig punt boven het punt van omslag gelegen. In het tweede geval worden gebogen lijnen doorloopen, die in een veel meer linksch gelegen punt van $\alpha\beta$ eindigen. Alle deze lijnen bevinden zich dus binnen de figuur door $Z\beta\uparrow$, $Z\gamma\uparrow$, $Z\gamma\downarrow$, $Z\alpha\beta\downarrow$ omsloten Vier zulke lijnen zijn bepaald en in de fig. geteekend: van herwatering $Z\overset{1.85}{\underset{1.15}{\uparrow}}$ en $Z\overset{1.85}{\underset{1.43}{\uparrow}}$ van herontwat. $Z\overset{1.85}{\underset{1.43}{\downarrow}}$ en $Z\overset{1.72}{\underset{1.26}{\downarrow}}$. Zij bewijzen dat de afneming van bindingsvermogen op $\alpha\beta$ trapsgewijze plaats heeft, evenals de toeneming op $Z\beta$.

Samenvattende, blijkt dat de gang omkeerbaar is:

op de lijn $A\alpha = Z\alpha$,

op de lijnen $A\gamma$, (vóór den omslag) en de lijn $Z\gamma$;

en dat op deze lijnen het evenwicht betrekkelijk snel verkregen wordt. Bij de opneming of afgifte van water is 1 tot 2 dagen voldoende om evenwicht te verkrijgen.

Niet omkeerbaar is de gang op de lijn:

$A\alpha\beta = Z\alpha\beta$ die alleen $\downarrow$ kan doorloopen worden en
$A\beta = Z\beta$ die " $\uparrow$ " " "

Evenmin op de opgaande en nedergaande lijnen tusschen $Z\beta\uparrow$ en $Z\alpha\beta$ gelegen.

Op deze lijnen, vooral op de eerste, wordt het evenwicht betrekkelijk langzaam verkregen. De lijn $A\beta\downarrow$ dus de ontwateringslijn *vóór den omslag* kan slechts in ééne richting, en ook maar *éénmaal* doorloopen worden. Bij die ontwatering ondergaat dus de gel eene wijziging met verzwakking van bindingsvermogen, welke zich niet herstellen kan. Slechts eenig zwak gebonden water γ kan op elk punt opgenomen worden. Evenwel wordt de loop van $A\beta$ niet gestoord of gewijzigd, wanneer op eenig punt weder herwaterd wordt, en dan herontwaterd. In korten tijd wordt weder hetzelfde punt terugverkregen.

De lijnen $Z\beta\uparrow - Z\gamma\uparrow - Z\gamma\downarrow - Z\alpha\beta\downarrow$ kunnen daarentegen achter elkander *herhaalde malen* rondgeloopen worden, mits in de gegeven volgorde, niet in de omgekeerde volgorde.

Na den omslag doet zich dus een geval voor van hysterésis, op $\alpha\beta\downarrow$ en op $\beta\uparrow$. Op de lijnen hebben wijzigingen plaats namelijk eene versterking en eene verzwakking van bindingsvermogen, welke nawerken.

II. De Hydrogel A_7.

Ten gevolge van de stolling (pectisatio) van den gel uit eene sterke oplossing, zoo als A_7, welke stolling plotselings plaats heeft tot een korreligen hydrogel, die na uitwassching niet glasachtig wordt maar steeds korrelig blijft, wordt een ander weefsel verkregen. De hoeveelheid water bedroeg oorspronkelijk slechts 20 Mol. op 1 Mol. $Si\,O_2$. Door ouder worden wordt ook dit nog meer gewijzigd. Het tweede links geplaatste stel lijnen op de fig. stelt de ont-, her- en herontwatering voor van A_7 bijna een jaar oud. Het komt duidelijk uit, dat $A_7\beta\downarrow$ niet verschilt van $A_1\,\beta$ maar dat de omslag bij $\pm$ 3 H_2O en 11—10 mm., dus veel eerder plaats heeft, waardoor $A_7\beta$ korter wordt, en hare richting maar weinig van $A_7\alpha\beta\downarrow$ verschilt. $A_7\alpha\beta$ wordt zeer lang, en $A_7\,\alpha$ zeer steil. Alle watergehalten, bij gelijken druk genomen, zijn veel kleiner dan van A_1. De lijn $Z_7\alpha\uparrow$ valt tot 0,5 à 0,6 H_2O bij 7–8 mm. samen met $A_7\alpha\downarrow$; en $Z_7\beta\uparrow$ loopt dicht bij $A_7\alpha\beta\downarrow$ met welke laatste weder $Z_7\alpha\beta\downarrow$ samenvalt. Dus bezit de figuur nog een overeenkomstigen vorm met dien van A_1, welke echter bij nog meer wijziging van den gel misschien in een enkele lijn zal overgaan (uitgezonderd het kleine stuk lijn $Z_7\gamma\uparrow$), nog wat meer links en naar boven gelegen. Bovendien valt op, dat de herwateringslijn $Z_7\beta$ zich veel verder uitstrekt, tot 3,4 H_2O toe bij 11,6 mm., en $Z_7\gamma$ zelfs tot een gehalte van 4 Mol. H_2O nadert. Dit water (β) wordt over het gansche beloop van $Z_7\beta\downarrow$ *langzaam* opgenomen, hetgeen met het karakter dezer lijn strookt.

A_7 (oud) is de gel die de laagste cijfers van watergehalte heeft opgeleverd, en dus den invloed van bereidingswijze en van tijd op de wijzigingen in het bindingsvermogen het sterkst heeft vertoond.

III. Wijzigingen.

Al de overige gels A_7 versch, en A_5, A_3, A_1, de laatste drie versch of van verschillenden ouderdom hebben stellen lijnen (A, Z $\downarrow$ en $\uparrow$) gegeven, die tusschen de beide op de figuur I afgeteekende stellen

gelegen zijn. A_7 versch ligt het meest naar links en naar boven. A_1 versch en *sneller* ontwaterd dan A_1 (van de figuur) gaf een overgangspunt bij nog lageren druk, en lijnen $\alpha\beta$ en α, lager en meer rechts gelegen dan van A_1 (van de figuur), zoodat deze het hoogste watergehalte op de lijnen $\alpha\beta$ en α vertoonde.

Wat de *bereidingswijze* aangaat: A_5, A_3 en A_1 vertoonen geene groote verschillen. Alleen A_5 ondergaat na eenigen tijd deze wijziging, dat zij bij ontwatering tot 9 à 8 mm. korrelig wordt, en dus hare glasachtigheid verliest — zoo als A_7 die reeds van den aanvang af niet meer bezit.

A_5 ondervindt ook van den tijd nog meer wijziging dan A_1.

Wat de wijziging *door den tijd* betreft, deze is aanmerkelijk. Zij moet reeds in den nog met water gevulden gel ontstaan en verraadt zich, *als eene vermindering van bindingsvermogen*, daardoor 1°. dat de omslag zich sterker vertoont en niet zoo spoedig weder verdwijnt, hetzij door verdere ontwatering, hetzij door herwatering; 2°. dat de omslag eerder plaats heeft, dus bij hoogeren druk, zoo dat de lijn $\alpha\beta$ langer wordt en naar boven wijkt; 3°. dat de lijn α naar links wijkt. Gels A_1 van 2 en 3 jaren oud vertoonden de wijzigingen sterker en naderden meer de lijnen van A_7 dan gels van 3—9 maanden oud, en zoo naar gelang. De lijnen Z toonden een overeenkomstig beloop, zoodat elke vermindering van bindingsvermogen bij A zich ook bij Z gevoelen deed.

Zeer merkwaardig is het daarbij, dat de ontwateringslijn $A\beta$ geen of weinig invloed van die wijzigingen ondervindt (ofschoon die wijzigingen daarin toch worden voorbereid) en ongeveer hetzelfde beloop houdt, ingeval de ontwatering van stap tot stap plaats heeft; wel wordt zij korter, omdat de omslag eerder plaats heeft, naarmate de wijzigingen sterker zijn.

Daarentegen doet een snelle gang van de ontwatering de lijn $A\beta$ naar links wijken. Een snellere gang wordt verkregen door den verschen gel, die eerst door uitpersing of aan de lucht tot ± 20 H_2O ontwaterd is, en dus nog ingesloten water bevat (zie het Verslag van 1892) dadelijk op een medium van 10, 9, 8, 7, 6 of 5 mm. te brengen. De gang is te sneller, naarmate de dampdruk van het medium geringer is. Bij denzelfden druk wordt dan een watergehalte verkregen dat 0,3—0,1 H_2O lager is dan bij langzamen gang. Daarentegen heeft nu de omslag bij lageren druk plaats bijv. tusschen 5 en 4,5 mm. bij een gehalte van 1,6—1,5 H_2O en wordt dus de lijn β verlengd, de lijn $\alpha\beta$ verkort, terwijl de lijn α juist meer rechts valt en dus hooger watergehalte aanwijst. Dit stemt daarmede, dat de gel, die in korteren tijd ontwaterd en dus niet

zoo oud is geworden, ook minder gewijzigd is. Het is tevens een bewijs, dat de ontwatering vóór den omslag een ander karakter heeft dan na den omslag, en dus evenzoo het gebonden water.

Op de herwatering hebben de ontwateringsgang, en de ouderdom dezen invloed, dat naarmate de lijn $\alpha\beta$ langer is, dus bij langzamen gang en naarmate de gel door ouderdom meer aan bindingsvermogen heeft verloren, de watergehalteverschillen van A ↓ of Z ↓ met Z ↑ bij gelijken druk grooter worden — van 0.2 tot 1.1 en meer. Bij A_7 oud zijn die verschillen het grootst geworden. Tevens houdt daarmede eenigzins gelijken tred het gehalte waartoe $Z\beta$ ↑ opklimt. Was de gel versch, de ontwateringsgang snel, en dus de gel niet ouder geworden dan 1 à 2 maanden bij den omslag, dan steeg $Z\beta$ ↑ niet hooger dan 1.5 à 1.6 H_2O (bij 8 à 9 mm.) en $Z\gamma$ tot 1.6 à 1.8. Daarentegen als de gel langzamer ontwaterd was, of door ouderdom meer gewijzigd, dan steeg $Z\beta$ ↑ naar gelang tot 1,8 en meer dan 2.0 H_2O. De meest gewijzigde gaf $Z\beta$ ↑ tot 2,3 en $Z\gamma$ tot 2,8; en A_7 (oud) zelfs tot 3,4 en 3,7 H_2O. Daarvoor was een geruime tijd noodig.

Het is dus duidelijk, dat naarmate de omslag bij de ontwatering eerder heeft plaats gehad, en de wijzigingen door den tijd het grootst zijn geweest, de omzetting die op de lijn $Z\beta$ ↑ en evenzoo bij herontwatering op de lijn $Z\alpha\beta$ ↓ *langzaam* plaats heeft, ook grooter is, zoodat een grooter gehalte langzaam bereikt, en langzaam weder wordt afgegeven.

Wordt de versche gel zoolang in een medium gehouden, welks druk eene waarde heeft tusschen 9,5 en 6 mm., totdat zich na eenige maanden ten slotte een blijvend evenwicht instelt, dan bedraagt het verlies, vergeleken met het gehalte dat naar de eerstgevolgde methode (zie bladz. 64) verkregen wordt, nog 0,5—0,2 H_2O meer (naar gelang de druk lager is), en nadert de lijn $A\beta$ de lijn $Z\beta$ ↑. De lijn $\alpha\beta$ wordt dan des te korter, en de kringloop wordt enger, omdat de afstand tusschen $Z\beta$ en $A\beta$ (of $Z\gamma$ ↓) geringer wordt.

Wijziging door verhitting van Z. Het bindingsvermogen wordt daardoor verminderd, zoodat de herwatering eene α lijn en eene β lijn geeft met minder watergehalte. Door zeer korte en niet sterke gloeiing is het bindingsvermogen merkbaar verminderd, door sterkere en langere gloeiing nog meer, ten slotte geheel. Doch zeer merkwaardig is het, dat ook hierbij de wijziging, die de gel door bereiding en door den tijd verkregen heeft, zich doet gevoelen, zoodat die invloed op de vermindering van verbindingsvermogen nog sterker kan zijn dan de invloed van eene korte gloeiing, en de laatste invloed des te sneller werkt, naarmate de wijzigingen bij A

grooter zijn geweest. A_7 oud verliest het wateropnemend vermogen geheel door eene korte gloeiing.

IV.

De omslag bij de ontwatering van A op een zeker punt bij hoogeren of lageren druk naar gelang van ouderdom enz. waargenomen en de geringe helling van de lijn $\alpha\beta$, deden reeds voor een tijd de vraag bij mij rijzen, of bij dien omslag soms eene scheiding der vaste oplossing in twee andere ontstaat, waardoor de gel zijne homogeniteit verliest, en troebel wit wordt. Volgens die hypothese zijn dan op de lijn $\alpha\beta$ twee vaste phasen aanwezig, waarvan de hoogst gewaterde allengs vermindert; drie phasen en twee stoffen samenzijnde, zoo moet de druk (conc. der gasphase) standvastig blijven, tot dat de hoogst gewaterde verdwenen is en de lijn $\alpha\beta$ in α overgaat; de gel is dan weder glashelder geworden, dus homogeen; dat $\alpha\beta$ niet geheel horizontaal loopt zou aan de langzame evenwichtsvorming te wijten zijn. Op deze wijze zou aan de eischen der hypothese voldaan worden, maar al de verschijnselen te zamen maken haar toch niet geoorloofd. Zoo zijn, onder anderen, op $Z\alpha\beta\downarrow$, standvastige punten verkregen, zoodat geene horizontale richting mag aangenomen worden. De lijn β gaat dus evenmin plotseling in $\alpha\beta$ over, als $\alpha\beta$ in α, zooals vereischt ware. Merkwaardig is het, dat de ontwateringslijn, in hare stukken β, $\alpha\beta$, α, eene groote overeenkomst vertoont met de (p. c.) lijn, die de Heeren ROOZEBOOM en HOITSEMA onlangs voor het Palladiumwaterstof bepaald hebben. Dezelfde vraag deed zich ook dáár voor ten opziehte van het bijna horizontale stuk bij lagere temperaturen, doch moest ontkennend beantwoord worden. Overigens komt mij zeer waarschijnlijk voor, dat de absorbtie-verschijnselen van gassen in vaste stoffen, zooals van waterstof in palladium, met die van water in colloïden groote analogie bezitten.

Het is misschien niet te verwonderen, dat bij deze eerste uitvoerige onderzoeking van het gedrag van het water in éénen hydrogel, bij ééne temperatuur — waarbij van absorptie of vaste oplossing, en niet van chemische verbinding sprake is, en waaromtrent tot nog toe door andere waarnemers niets bepaalds is bekend gemaakt — het nog niet gelukt is al de ingewikkelde verschijnselen in een bevredigend verband te brengen d. i. daarvan eene verklaring te geven. De grenzen tusschen ingesloten water, zwakker en sterker gebonden water, zijn niet aan te geven, de overgang schijnt eene

geleidelijke te zijn. Het gebonden water van den gel is eene functie van de concentratie der gasphase, met die concentratie zelve veranderlijk, en veranderlijk met de temperatuur. Het bindingsvermogen hangt bovendien van den bouw van het gelweefsel af, welke bouw zeer veranderlijk is.

Die bouw, en daarmede het bindingsvermogen voor water bij eene zekere waterdampspanning, wijzigt zich, en op verschillende wijze: 1^0. door de wijze van stolling (pectisatio) van den gel uit de alkalische oplossing door een zuur 2^0. door de ontwatering en herwatering zelve 3^0. door den snelleren of langzamen gang der ontwatering 4^0. door den tijd 5^0. door verhitting — en misschien nog door andere omstandigheden.

De ontwatering en herwatering zijn ten deele niet omkeerbaar, ten deele wel omkeerbaar. Verschijnselen van hysterésis treden daarbij op [1]).

Het aantal werkende factoren is dus groot en ingewikkeld. Ik heb mij, vooreerst, in hoofdzaak bepaald tot eene rangschikking van het verzamelde materiaal van feiten. Op eene nadere beschouwing daarvan hoop ik in de volgende zitting der Afdeeling terug te komen.

Physiologie. — De Heer STOKVIS biedt eenige brochures aan van zichzelven en eenigen zijner leerlingen, en spreekt naar aanleiding van de dissertatie van Dr. LANGEMEIJER: „*Over den invloed van het gebruik van suiker op den spierarbeid*".

Tot het erkennen van den invloed van het suikergebruik op den spierarbeid heeft Dr. LANGEMEIJER, evenals MOSSO, PAOLETTI, HARLEY e. a. van den ergograaf van A. MOSSO gebruik gemaakt, die, zooals bekend is, in staat stelt den door de spieren van den middenvinger bij het tillen van een bepaald gewicht geleverden arbeid in kilogrammeters te meten, en de snelheid, waarmede de vermoeienis bij in regelmatige intervallen (b. v. 2 seconden) uitgevoerde herhaling van dien arbeid optreedt, te bepalen.

Om met dit instrument betrouwbare resultaten te verkrijgen, die in eene questie als die over den invloed van suiker op spierarbeid van beteekenis kunnen zijn, dient men de aan het instrument toekomende fouten, de oorzaak der individueele verschillen, en die der verschillen

---

[1]) De uitkomsten die ik vroeger verkreeg bij het onderzoek der hydrogels van $Fe_2 O_3$ en $Cu O$ sluiten zich bij de thans verkregene zeer goed aan.

bij éénzelfde individu nauwkeurig te kennen. Bij zijne onderzoekingen sloot Dr. L. den psychischen invloed van het dadelijk zien der getrokken curven door een schermpje uit, belette hij den invloed van het heen- en wéértrekken van den arm, door dien krachtig te bevestigen, nam hij bij het laten vallen van het gewicht na het optillen steeds ééne methode in acht, d. i. die van het gewicht langzaam te laten zakken, terwijl hij verder vond, dat aan het optillen van het gewicht twee spieren : de flexor profundus en de flexor sublimis deelnemen, die in den regel samenwerken, maar die bij lange oefening, bij sommige individuen sneller dan bij andere, afzonderlijk kunnen bewogen worden, welke afzonderlijke bewegingen alsdan direct na elkander kunnen worden verricht, zoodat, wanneer b.v. de m. profundus is vermoeid, de sublimis het werk overneemt, en zoo verder.

Na dus met het instrument vertrouwd te zijn geraakt, onderzocht Dr. L. in zijne eerste proevenreeks den invloed van den zoeten smaak en dien van de suiker als voedsel op den ergografischen arbeid, door zoetsmakende suiker als rietsuiker, niet zoetsmakende suiker als melksuiker, en zoetsmakende stoffen, die niet tot voeding dienen kunnen, als saccharine en dulcine, te gebruiken, en den kort na het gebruik daarvan verrichten arbeid te bepalen. Aan het slot dezer eerste proevenreeks werden tot contrôle de proeven nog 14 dagen voortgezet, zonder dat behalve het gewone voedsel iets bijzonders gebruikt werd. Het resultaat dezer proevenreeks luidde: dat niet de minste invloed van het gebruik van suiker of zoetsmakende stoffen op den een paar malen daags verrichten ergografischen arbeid te bemerken was, en dat de vermeerdering van den arbeid, die tijdens het gebruik van suiker en zoetsmakende stoffen gradueel steeg, niet alleen eenvoudig het gevolg was van de oefening van de training, maar ook, nadat het suikergebruik had opgehouden, even duidelijk bleef voortbestaan. In de tweede proevenreeks werd door Dr. L. en degenen, die met hem deze proeven namen, gedurende 3—3½ achterelkander volgende uren telkens met korte tusschenpoozen zulk een ergografische arbeid verricht, dat zooveel mogelijk totale uitputting volgde, en geen arbeid of slechts een zeer geringe meer mogelijk bleek. Dan werd suiker gebruikt, om den invloed daarvan op de door arbeid uitgeputte spier na te gaan. Ook in deze proevenreeks was een invloed van suiker op de spieren niet te bespeuren. Waren in de beide medegedeelde proevenreeksen betrekkelijk kleinere hoeveelheden suiker gebruikt, in de laatste proevenreeks werd met grootere hoeveelheden 100, 200, 250 gram daags geëxperimenteerd. Daar de op verschillende dagen verrichte arbeid onderling meer verschil oplevert, dan de op één zelfde dag, des morgens of des middags verrichte

arbeid, werd allereerst de ergografische arbeid van 's morgens zonder suikergebruik met dien van 's middags na het gebruik van 100 of 200 gram vergeleken. De resultaten waren: *Gemiddelde waarde van ergografischen arbeid:*

's Morgens zonder suiker Gemidd. uit 17 proeven	's Middags met 100 gram suiker. Gemidd. van 17 proeven
13.200.	12.612.
Zonder suiker Gemiddeld uit 11 proeven	Met 200 gram suiker. Gemiddeld uit 11 proeven.
13 322.	12.483.

Eindelijk werd dagelijks van 9.30 tot 5.30 elk uur ergografische arbeid verricht, door met beide handen elk uur eene ergografische curve te trekken, en den eenen dag 250 gram suiker over viermalen verdeeld gebruikt, den anderen dag niet. De resultaten waren als volgt:

Totaal van den verrichten arbeid:

	Dagen zonder suiker:	Dagen met suiker:
R. Hand	168.640 Kgrm.	147.486
L. Hand	185.388 〃	154.628

De conclusie luidt: dat de tot nog toe gedane proefnemingen geen enkel bewijs brengen voor het bestaan van een zoogenaamden dynamogenen invloed van suikergebruik op spierarbeid.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT deelt de uitkomsten mede van een onderzoek van Dr. C. A. LOBRY DE BRUYN naar de bereidingswijze en de eigenschappen van het hydrazine.

Het vrije hydrazine $H_2 N . N H_2$ kan langs twee wegen worden bereid. 1°. (zie Recueil 13) uit $N_2 H_4 . H Cl$ met natriummethylaat in methylalcoholische oplossing. 2°. Door het hydraat $N_2 H_6 O$ met baryumoxyde te verwarmen op 100°.

Het vrije hydrazine is een eenigszins dikke vloeistof met een reuk als die van het hydraat; zij kan bij gewonen druk zonder ontleding tot koken worden gebracht, bij 761 mM. ligt het kookpunt bij 113°,5, bij 71 m.M. bij 56°. Afgekoeld in ijs en zout wordt het vast, het ligt bij + 2°, de dichtheid $\left(d\,\frac{23}{23}\right)$ is 1.0075, dus ongeveer gelijk aan die van het hydraat (dat kookt bij 119°). Het rookt sterk aan

de lucht en wordt gemakkelijk geoxydeerd door de zuurstof van den atmosfeer onder ontwikkeling van stikstof. Het is brandbaar in lucht.

Het hydrazine is veel bestendiger dan het hydroxylamine en in tegenstelling daarvan niet explosief.

Nadere bijzonderheden over zijne eigenschappen zullen in het Recueil worden gepubliceerd.

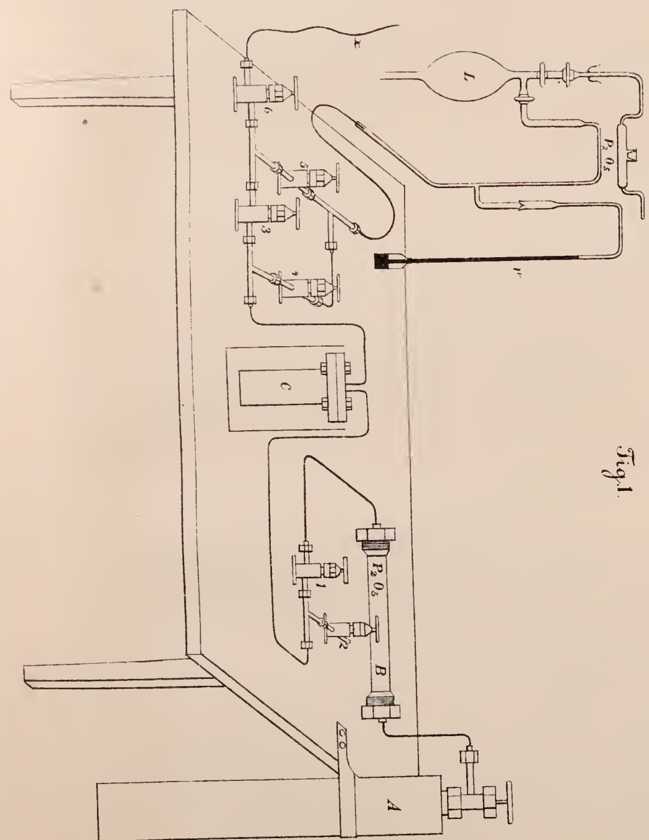
Het vaste hydrazine wordt getoond.

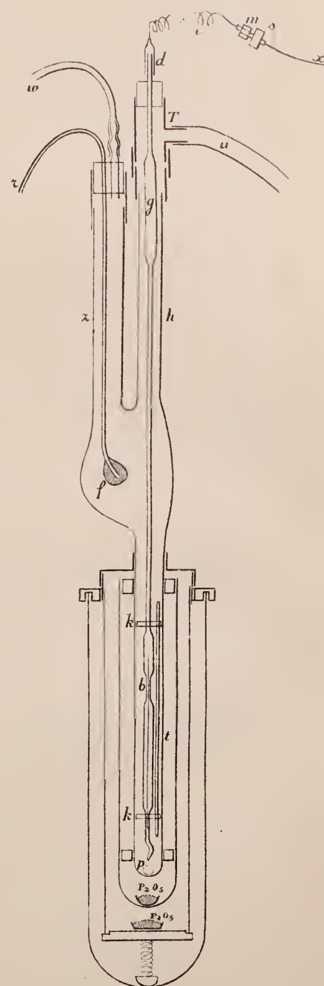
Scheikunde. — De Heer MULDER biedt twee mededeelingen aan voor de verhandelingen n.l. 1°. „*Over verbindingen, afgeleid van wijnsteenzuur en parabrandig druivenzuur*” en 2°. „*Over den nadeeligen invloed van het zwaveligzuur der vlam van steenkolengas op de bepaling en hoeveelheid van eenige lichamen en over eene methode om daarin te voorzien*”.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES doet, namens den Heer Dr. J. VERSCHAFFELT uit Gent, eene mededeeling over: „*Metingen omtrent capillaire stijghoogten van vloeibare gassen*”, verricht in het Natuurkundig Laboratorium te Leiden.

1. *Methode.* De waarnemingen werden verricht met koolzuur en stikstofoxydule. Daar het uit onderzoekingen van KUENEN is gebleken, dat men deze stoffen gemakkelijk zuiver kan verkrijgen uit de vloeibare gassen die in ijzeren bussen in den handel worden gebracht, heb ik deze gassen aan een zuiveringsproces onderworpen, zooals door KUENEN in zijne dissertatie (Arch. Neerl. 26, 35, 1893) werd beschreven. De zuiveringstoestel is op fig. 1 afgebeeld: *A* is de ijzeren bus die het nog onzuivere, vloeibare gas inhoudt, *B* een dikwandige ijzeren buis met phosphorpentoxyde, en *C* het dikwandige koperen busje, waarin het gezuiverde vloeibare gas wordt verzameld. Deze gansche toestel kan, door middel van de kwikluchtpomp, luchtledig worden gezogen, terwijl kraan 6 de zuiveringsinrichting van de waarnemingsinrichting scheidt.

De inrichting voor het meten van stijghoogten is in hoofdzaak dezelfde als die door DE VRIES bij het bewerken zijner dissertatie werd gebruikt (Arch. Neerl. 28, 212, 1894). De dikwandige glazen buis *b* (fig. 2), waarin de capillair is opgesloten, draagt van boven een lang stuk nauw manometerbuis, die zelf een breeder gedeelte *g* bevat, met glaswol gevuld; deze glaswol is noodzakelijk voor het tegenhouden van stofdeeltjes die door het instroomend gas uit ver-





Verschaffelt. Capillariteit. (30 Juni 1895.)
Versl. d. afd. Natuurk. A° 1895-96.

bindingsbuizen of kranen konden medegesleept worden. Twee kurkjes *k* dienen tot het goed gecentreerd houden van de waarnemingsbuis in het vloeistofbad, en dragen den thermometer *t*.

Het boveneinde der waarnemingsbuis is, door middel van zwavel, gekit in een koperen dopje *d* dat, om zooveel mogelijk alle stugheid te vermijden door middel van een langen stalen capillair *c* met een moertje *m* is verbonden; dit laatste kan op een tapstuk *s* worden geschroefd, dat aan een langen koperen capillair *x* gesoldeerd is, en langs kraan 6 en 5 (fig. 1) met het busje *C* en de kwikluchtpomp *L* verbonden is.

De vulling der waarnemingsbuis geschiedt op de volgende wijze: kraan 5 en 6 worden opengezet en het luchtledige in de buis gemaakt; daarna gaat 5 weer dicht en wordt 3 geopend, nadat *C* tot de kamertemperatuur teruggebracht is. Is in buis *b* de temperatuur lager dan in *C*, dan distilleert daarin de vloeistof uit *C* over; is op die wijze eene voldoende hoeveelheid vloeistof verzameld, dan worden de kranen 3 en 6 weer dichtgemaakt. Over 't algemeen was na deze bewerking de vloeistofdraad in den capillair gesplitst, hetzij door laatste sporen lucht, hetzij door dampbelletjes. De continuiteit van den capillairen draad verkreeg ik steeds door de vloeistof heel langzaam te laten koken: daarvoor werden kraan 5 en 6 een weinig opengezet, en de damp ontsnapte langs den veiligheidsmanometer *v*.

Voor afleesinrichting en veiligheid der waarnemingen verwijs ik naar DE VRIES (Proefschrift, Leiden 1893).

Voor proeven in de nabijheid der kamertemperatuur, werd de waarnemingsbuis geplaatst in een glazen cylinder van ongeveer dezelfde lengte (1 M. ongeveer), en omtrent 5 cM. breed, waardoor het water der waterleiding stroomde: het kwam van onderen in en stroomde van boven langs een zijbuis weg. Om een neerslag van waterdamp op het waterbad te voorkomen, werd dit nog omringd door een tweeden cylinder, en de ruimte tusschen beiden met phosphorpentoxyde gedroogd.

Fig. 2 stelt voor de inrichting der proef bij waarnemingen in kokend chloormethyl. De glazen toestel is dezelfde als die, waarmede DE VRIES waarnemingen heeft gedaan in kokend aethyleen; wegens zooveel minder lage temperatuur konden echter eenige complicaties achterwege blijven.

De waarnemingsbuis wordt geschoven in een buis van ongeveer dezelfde lengte: circa 1 M., en ongeveer 3 cM. in diameter, waaraan een zijbuis is bevestigd, langs welke het vloeibaar chloormethyl wordt ingeschonken; deze twee buizen zijn met stoppen gesloten en met

collodium elasticum luchtdicht gemaakt. De hoofdbuis *h* draagt een koperen T-stuk *T* van dezelfde breedte, dat langs een breede, stugge caoutchoucslang *u* met zakken verbonden is, voor het opvangen van het gasvormige chloormethyl. Door de stop die de zijbuis *z* sluit komt de koperen capillair *r* waardoor de vloeistof stroomt, en een glazen buisje dat langs een dikwandige caoutchoucslang *w* met een luchtpomp verbonden is; *f* is een glaswolfiltertje voor het zuiveren van het instroomend chloormethyl. Alvorens het vloeibaar chloormethyl wordt ingeschonken, worden de toestel en de zakken luchtledig gepompt. Aangezien de ruimte waarin de vloeistof kookt in verbinding staat met de zakken waarop de gewone luchtdruk rust, zoo kookt het chloormethyl zelf onder gewonen luchtdruk; het kleine verschil dat het gevolg van de stugheid der zakken zou kunnen zijn, kan op een differentiaalmanometer worden afgelezen; een merkbaar verschil heb ik echter niet waargenomen.

Om het ondereinde van de hoofdbuis bevinden zich een reeks glazen cylinders, zooals bij de proeven van WROBLEWSKI en OLSZEWZKI. Deze glazen cylinders dragen er tevens toe bij om de veiligheid gedurende de waarnemingen te verhoogen; na afloop der hier medegedeelde proeven is mijne waarnemingsbuis gesprongen, vermoedelijk door het te vlug afkoelen van een niet goed aangesmolten plaats, met dit gevolg dat in de onmiddellijke nabijheid alles werd verbrijzeld, het buitenste glas echter ongedeerd bleef.

2. *Waarnemingen.* Na het condenseeren der vloeistof in de waarnemingsbuis, of na het koken tot verwijdering der gasbelletjes uit den capillair, was steeds de temperatuur in de buis iets verschillend van de temperatuur in het omgevend bad. Het evenwicht met het bad herstelde zich slechts langzaam door de dikwandige waarnemingsbuis, zoodat minstens een half uur verliep alvorens een constante stijghoogte werd gevonden.

Om zeker te zijn dat de zorgvuldig uitgekozen capillair werkelijk overal denzelfden diameter had, werd de stijghoogte op verschillende hoogten waargenomen; de diameter bleek overal volkomen dezelfde waarde te hebben. Deze proef eens genomen zijnde, voor een willekeurige temperatuur, zoo kon bij alle andere proeven de stijghoogte op een willekeurige plaats van den capillair worden gemeten. Volgende stijghoogten *h* werden waargenomen; de waargenomen stijghoogte is de afstand van het laagste punt van den meniscus in den capillair, tot het laagste punt van den meniscus in de ringvormige ruimte, tusschen capillair en waarnemingsbuis begrepen. Voor het aanbrengen der correctie aan de stijghoogten, werd ook gemeten de hoogte *d* van den ringvormigen meniscus.

I. Koolzuur.

1°. Kamertemperatuur; het waterbad werd langen tijd in rust gelaten, totdat de temperatuur van het water met die der omgeving in evenwicht was:

t = 20°,9 h = 4,20 mm. d 0,61 mm.

2°. Temperatuur der waterleiding:

t = 15°,2 h = 6,55 mm. d = 0,75 mm.

3°. Afgekoeld waterbad; verkregen door de waterleiding te laten stroomen door een koperen spiraal, in smeltend ijs gelegd:

t = 8°,9 h = 9,20 mm. d = 0,88 mm.

4°. Kokend chloormethyl.

t = — 24°,3 h = 21,75 mm. d = 1,18 mm.

II. Stikstofoxydule.

1°. Kamertemperatuur:

t = 19°,8 h = 6,60 mm. d = 0,72 mm.

2°. Temperatuur der waterleiding:

t = 14°,4 h = 8,71 mm. d = 0,85 mm.

3°. Kokend chloormethyl:

t = — 24°,0 h = 23,20 mm. d = 1,24 mm.

Worden de stijghoogten graphisch voorgesteld, dan ziet men dat de waarnemingen bij de hoogste temperaturen op een rechte lijn liggen, die de as der temperaturen (abscissenas) snijdt bij het kritisch punt: 31°, 1 bij koolzuur, 36°, 1 bij stikstofoxydule. De waarnemingen in kokend chloormethyl liggen een weinig onder deze rechte lijn; de curve der stijghoogten is dus een weinig naar de abscissenas toe gebogen.

Merkwaardig is het dat, wanneer men de twee curven zoo verplaatst dat haar oorsprongen samenvallen, zij elkander schier volkomen bedekken. Op gelijken afstand van het kritisch punt vertoonen koolzuur en stikstofoxydule dus ongeveer dezelfde stijghoogte

Men beschouwt gewoonlijk de meridiaandoorsnede van een ringvormigen meniscus als bestaande uit twee halve cirkels; is deze onderstelling juist, dan moet de hoogte van dien meniscus de waarde $\frac{r_3 - r_2}{2}$ hebben, indien r_3 voorstelt den inwendigen straal der waarnemingsbuis, en r_2 den uitwendigen straal van den capillair. In mijn proeven was $r_3 = 3,30$ mm. en $r_2 = 0,52$ mm.; dus is $\frac{r_3 - r_2}{2} = 1,39$ mm. Stelt men de waargenomen d-waarden graphisch voor, dan ziet men dat de zoo verkregen punten op een curve liggen, die van uit het kritisch punt tamelijk snel naar de hoogte gaat, om bij lagere temperatuur langzaam tot de grenswaarde 1,39 te naderen.

3. *Correcties.* De oppervlakteenergie σ, in ergs uitgedrukt, berekent men uit de volgende formule:

$$\sigma = \tfrac{1}{2} g \ H (\varrho_v - \varrho_d) r_1,$$

waarin voorstellen

r_1 den inwendigen straal van den capillair in cm.,
ϱ_v en ϱ_d de densiteiten van vloeistof en damp,
H de werkelijke stijghoogte in cm.,
$g = 981,1$.

De werkelijke stijghoogte wordt uit de waargenomene door twee correcties verkregen; de eerste correctie, van den meniscus in den capillair afkomstig, bedraagt $\frac{r_1}{3}$. Voor r_1 heb ik gevonden 0.0873 mm., dus $\frac{r_1}{3} = 0.029$ mm.

Wat de tweede correctie betreft, hare beteekenis is deze, dat wij den afstand hebben gemeten tusschen de laagste punten van beide menisci, terwijl wij moeten kennen de stijghoogte boven een oneindig uitgestrekt horizontaal vlak. Wij moeten dus trachten te bepalen, welke de hoogte is boven dat vlak van het laagste punt van den ringvormigen meniscus Stellen wij deze laatste hoogte voor door h', dan is

$$H = h + h' + 0,029.$$

Was, zooals gewoonlijk aangenomen wordt, de meridiaandoorsnede van den ringvormigen meniscus cirkelvormig, dan moest, zooals wij

reeds hebben gezien, $d = 1{,}39$ mm. zijn. Directe waarnemingen hebben nu echter bewezen, dat dit niet het geval is.

Een goede grondslag ontbrak aan DE VRIES (zie Proefschrift, p. 40) bij het aanbrengen dezer correctie: deze grondslag meen ik nu in de waarde van d zelf gevonden te hebben; men voelt inderdaad dat de correctie met de d-waarde nauw verbonden moet zijn. Bij het corrigeeren van stijghoogten in breedere cirkelvormige buizen, waarin de meniscus voorzeker niet meer bolvormig is, wordt soms aangenomen dat het oppervlak een omwentelingsellipsoïde is. Het ligt nu voor de hand, in het geval van een ringvormigen meniscus een soortgelijke onderstelling te maken: is de meridiaandoorsnede een ellips dan is de halve groote as $= \frac{r_3 - r_2}{2} = 1{,}39$ mm., terwijl de halve kleine as $= d$ is.

In deze onderstelling is de radiale hoofdkromtestraal

$$\frac{\left(\frac{r_3 - r_2}{2}\right)^2}{d}$$

terwijl de tweede hoofdkromtestraal oneindig groot is. Derhalve is

$$\frac{1}{2} g \, (\varrho_v - \varrho_d) \, h' = \frac{\sigma}{2} \left[\frac{d}{\left(\frac{r_3 - r_2}{2}\right)^2} \pm \frac{1}{\infty}\right] = \sigma \frac{2d}{(r_3 - r_2)^2};$$

en aangezien

$$\sigma = \frac{1}{2} g \, r_1 \, (\varrho_v - \varrho_d) \, (h + h' + 0{,}029),$$

is

$$h' = (h + 0{,}029) \frac{\frac{2d}{(r_3 - r_2)^2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{2d}{(r_3 - r_2)^2}}.$$

Door middel van deze formulen heb ik de volgende tabel opgesteld:

I. Koolzuur.

$t = 20°,9$	$h' = 0{,}058$ mm	$H = 4{,}29$ mm
$15°,2$	$0{,}112$	$6{,}69$
$8°,9$	$0{,}186$	$9{,}41$
$-24°,3$	$0{,}594$	$22{,}37$

II. Stikstofoxydule.

t = 19°,8	h' = 0,109 mm	H = 6,74
14°,4	0,170	8,91
—24°,0	0,668	23,90

4. *Oppervlakte-energie.* De werkelijke stijghoogte aldus bepaald zijnde, kunnen wij overgaan tot het berekenen van de oppervlakte-energie σ. De densiteiten van koolzuur en stikstofoxydule, als gas en als vloeistof, ontleen ik aan CAILLETET en MATHIAS (Journal de Physique, 2e série, t. 5; 1886). De temperaturen heb ik in gereduceerde temperaturen m uitgedrukt:

I. Koolzuur.

m = 0,9665	$\varrho_v - \varrho_d$ = 0,5430	σ = 1,00	σ (berekend) 1,00
0,9477	0,6341	1,82	1,79
0,9270	0,7203	2,90	2,78
0,8178	0,9631	9,21	9,21

II. Stikstofoxydule.

m = 0,9473	$\varrho_v - \varrho_d$ = 0,6092	σ = 1,74	σ (berekend) 1,74
0,9298	= 0,6712	2,50	2,55
0,8056	= 0,9983	9,92	9,92

Wil men deze getallen voorstellen met behulp der formule

$$\sigma = A\ (1-m)^B,$$

waarin A en B constanten zijn, onafhankelijk van de beschouwde stof (verg. v. D. WAALS, Zeitschr. f. physik. Chem., 13, 716, 1894), dan komt

CO_2	$\log A$ = 1,934	B = 1,311
NO_2	1,945	1,333;

met deze constanten is de kolom σ (berekend) in de voorgaande tabel gevonden.

Vergelijken wij deze waarden met die welke voor andere stoffen zijn verkregen:

Aethyloxyd	log A = 1,761	B = 1,270
Benzol	1,839	1,230
Azijnzuur Aethyl	1,810	1,230
Chloorbenzol	1,827	1,214
Tetrachloorkoolstof	1,811	1,228

zoo zien wij dat de overeenkomst bevredigend is. En het is wel merkwaardig dat bij koolzuur en stikstofoxydule de constante B alweer meer nadert tot de theoretische waarde $^3/_2$, die v. d. Waals vond in de nabijheid der kritische temperatuur.

De moleculaire oppervlakte-energie is gelijk aan

$$\sigma_M = \sigma\ (M\,v)^{2/3} = \sigma\ \frac{M^{2/3}}{(\varrho_v)^{2/3}}$$

M is het moleculairgewicht = 44 voor koolzuur en stikstofoxydule.

Koolzuur.

t	σ	ϱ_v	σ_M
20°,9	1,00	0,7550	15,0
15°,2	1,82	0,8023	26,2
8°,9	2,90	0,8540	40,2
—24°,3	9,21	1,0097	114,1

Stikstofoxydule.

t	σ	ϱ_v	σ_M
19°,8	1,74	0,7580	26,1
14°,4	2,50	0,8006	36,1
—24°,0	9,92	1,0392	120,5.

Volgens de theorie [1]) moet $\frac{d\sigma_M}{dt}$ voor alle stoffen eene zelfde functie zijn der temperatuur; de waarnemingen hebben inderdaad geleerd dat voor een aantal stoffen, op eenigen afstand van de kritische temperatuur, $\frac{d\sigma_M}{dt}$ eene constante is [2]) en wel voor alle die stoffen nagenoeg dezelfde: gemiddeld 2,27.

---

[1]) J. D. v. d. Waals. Versl. Kon. Akad. 21, 1881.
H. Kamerlingh Onnes, " " " " "
R. Eötvös, Wied. Ann. 27, 448; 1886.
vergelijk verder v. d. Waals, Zeitschr. f. physik. Chem. 13, 713; 1894.
[2]) R. Eötvös, loc. cit.
W. Ramsay & J. Shields, Zeitschr. f. physik. Chem., 12, 433, 1893.

Voor koolzuur berekenen wij uit de voorgaande cijfers:

$$\frac{d\sigma_M}{dt} = 2{,}222 \qquad \text{tusschen } 15°{,}2 \text{ en } 8°{,}9$$

$$2{,}223 \qquad \text{tusschen } 8°{,}9 \text{ en } -24°{,}3$$

Voor stikstofoxydule is

$$\frac{d\sigma_M}{dt} = 2{,}198 \qquad \text{tusschen } 14°{,}4 \text{ en } -24°{,}0$$

Hier is de overeenkomst met de wet der overeenstemmende toestanden nogmaals zeer bevredigend.

Volgens het kriterium, door RAMSAY en SHIELDS aangegeven, bij het onderscheiden van geassocieerde en niet-geassocieerde vloeistoffen, zouden koolzuur en stikstofoxydule niet geassocieerd zijn; en dit komt overeen met de berekeningen van CAILLETET en MATHIAS (loc. cit.) omtrent de geldigheid van de wet der overeenkomstige toestanden bij deze gassen, en de wet van den rechtlijnigen diameter.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS staat af voor het Zittingsverslag: *Over de kritische (plooipunts) omstandigheden van een mengsel.* Vervolg op het medegedeelde in de vorige zitting der Akademie.

De differentiaalvergelijking voor den loop der plooipuntslijn, die in de vorige Zitting der Akademie is medegedeeld en bediscussieerd, kan op een geheel andere wijze worden gevonden. Beschouwen wij een punt der plooipuntslijn. Zulk een punt stelt de drukking voor van het mengsel van gegeven samenstelling, bij bepaalde temperatuur en bepaald volumen. Voor een volgend punt is x, τ en V veranderd tot $x + dx$, $\tau + d\tau$ en $V + dV$ en bij gevolg geldt de vergelijking:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial p}{\partial \tau}_{Vx} + \frac{\partial p}{\partial x}_{V\tau} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial p}{\partial V}_{x\tau} \frac{dV}{d\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

welke ook kan geschreven worden:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial p}{\partial \tau}_{Vx} + \frac{\partial p}{\partial x}_{V\tau} \left(\frac{dx}{d\tau} - \frac{\partial x}{\partial V}_{p\tau} \frac{dV}{d\tau}\right) \quad . \quad . \quad (2$$

Daar voor een plooipunt $\frac{\partial f}{\partial V_{x\tau}} + \frac{\partial v}{\partial V_{p\tau}} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ is kan (2) ook herleid worden tot:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial p}{\partial \tau_{Vx}} + \frac{\frac{\partial p}{\partial x_{V\tau}}}{\frac{\partial f}{\partial x_{V\tau}}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{v\tau}} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial V_{x\tau}} \frac{dV}{d\tau} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Beide punten der plooipuntslijn stellen punten voor eene spinodale lijn, zoodat zoowel $f = 0$ is, als $df = 0$, — en dus

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{Vx}} + \frac{\partial f}{\partial x_{V\tau}} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial V_{x\tau}} \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0.$$

Met behulp dezer betrekking verkrijgt (3) den vorm:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial p}{\partial \tau_{Vx}} - \frac{\frac{\partial p}{\partial x_{V\tau}}}{\frac{\partial f}{\partial x_{V\tau}}} \frac{\partial f}{\partial \tau_{Vx}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Om deze vergelijking in de vroeger verkregen gedaante over te brengen, moet de waarde van $\frac{\partial f}{\partial \tau_{Vx}}$ gezocht worden. Uit

$$f = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V} \right)^2$$

volgt:

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau_{vx}} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial V} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V},$$

daar uit $d\psi = -\eta\, d\tau - p\, dV + \frac{\partial \psi}{\partial x_{v\tau}} dx$ voor $\frac{\partial \psi}{\partial \tau_{vx}}$ de waarde $-\eta$ afgeleid wordt. Nemen wij nu nog in aanmerking, dat:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \tau \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \, \partial V} = \tau \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \, \partial V} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial V}$$

en
$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} = \tau \frac{\partial^2 \eta}{\partial V^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}$$

dan vinden wij

$$-\tau \frac{\partial f}{\partial \tau_{Vx}} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \, \partial V} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial V} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}$$

Gesubstitueerd in (4) verkrijgen wij, zooals vroeger

$$\tau \left(\frac{dp}{d\tau} - \frac{\partial p}{\partial \tau_{Vx}} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial V} \; \frac{\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2 \dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \, \partial V} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial V} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}}{-\dfrac{\partial f}{\partial x_{V\tau}}}$$

Vergelijking (4) kan ook aldus geschreven worden:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial p}{\partial \tau_{Vx}} - \frac{\dfrac{\partial p}{\partial V_{x\tau}}}{\dfrac{\partial f}{\partial V_{x\tau}}} \frac{\partial f}{\partial \tau_{Vx}}$$

of
$$\frac{dp}{d\tau} - \frac{dp}{d\tau_{Vx}} = - \frac{\left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} \right)^3}{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2_{p\tau}}} \frac{\partial f}{\partial \tau_{Vx}} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Volgens (5) kan de stelling, die ik aan het slot mijner vorige mededeeling uitsprak, scherper worden geformuleerd. Aldus: De plooipuntslijn stijgt steiler dan de spanningslijn, ingeval $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2_{p\tau}}$ negatief is, als wij n.l. mogen stellen, dat $\frac{\partial f}{\partial \tau_{vx}}$ steeds positief is — d. w. z. als wij mogen aannemen, dat de stabiliteit eener plooipuntsphase steeds met stijgende temperatuur toeneemt.

Dat de laatste onderstelling niet voor elke willekeurige phase gelden zal, belet niet dat zij gelden kan voor alle punten eener spinodale lijn, à fortiori voor plooipunten. Toch toont dit, dat, hoe waarschijnlijk de onderstelling ook klinkt, zij nader bewijs blijft eischen. In elk geval is voor waarden van x dicht bij 0 of 1 de grootheid $\dfrac{\partial f}{\partial r_{Vx}}$ positief, daar zij zoowel voor $x = 0$ en $x = 1$ zelfs oneindig groot is.

Is de samenstelling van het mengsel gegeven, dan zijn voor den kritischen toestand (plooipuntstoestand) al de andere omstandigheden bepaald. De waarden van p, V en r zijn zuivere functiën van x, en bijgevolg hebben ook $\dfrac{dp}{dx}$, $\dfrac{dV}{dx}$, $\dfrac{dr}{dx}$, $\dfrac{dp}{dV}$, $\dfrac{dV}{dr}$ en $\dfrac{dp}{dr}$ bepaalde waarden. De functien $p = F_1(x)$ en $r = F_2(x)$, als die konden gevonden worden, zouden aangeven, hoe de kritische druk en temperatuur van de samenstelling afhangt.

Het is merkwaardig, dat van al de opgenoemde betrekkingen, de waarde van $\dfrac{dp}{dr}$ het eenvoudigste is af te leiden. Hieruit blijkt wel, dat als vroegere waarnemingen tot eenvoudige algebraische vergelijkingen deden besluiten (wet van Palewski enz.), deze vergelijkingen hoogstens als benaderingen mogen beschouwd worden, en dan nog slechts in bijzondere gevallen.

De weg die zou moeten gevolgd worden, om tot de kennis der opgenoemde betrekkingen te komen, kan worden aangeduid, en zal in sommige gevallen kunnen leiden tot een antwoord op vragen omtrent twijfelachtige punten.

Noemen wij V, x en r het volumen, de samenstelling en de temperatuur, dan moeten die grootheden in de eerste plaats voldoen aan de vergelijking der spinodale lijn $f = 0$ — en in de tweede plaats aan de vergelijking $\dfrac{\partial f}{\partial V_{x\tau}} \dfrac{dV}{dx_{p\tau}} + \dfrac{\partial f}{\partial x_{v\tau}} = 0$

$$\text{of } \frac{\partial f}{\partial V_{x\tau}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial V} - \frac{\partial f}{\partial x_{v\tau}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} = 0 \quad \text{of } \frac{\partial f}{\partial V_{x\tau}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x_{v\tau}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial V} = 0$$

Wij hebben dus twee vergelijkingen waaraan V, x en r voldoen moeten. Noemen wij ze $f = 0$ en $F = 0$.

Door eliminatie van V vindt men r als functie van x, — door eliminatie van r het kritisch volume als functie van x, en door

eliminatie van x het kritisch volume als functie van de kritische temperatuur. Is dus x gegeven, dan is V en τ en bijgevolg ook p bekend. Alleen de eliminatie, waarvan hier gesproken wordt, is in werkelijkheid niet uit te voeren. Reeds de vergelijking $f=0$ is een zeer ingewikkelde [1]), à fortiori de vergelijking $F=0$.

Stellen wij ons tevreden met de kennis van $\frac{d\tau}{dx}$ en $\frac{d\tau}{dV}$, en daar $\frac{dp}{d\tau}=\frac{\partial p}{\partial \tau_{Vx}}+\frac{\partial p}{\partial x_{V\tau}}\frac{dx}{d\tau}+\frac{\partial p}{\partial V_{x\tau}}\frac{dV}{d\tau}$ is, met de kennis van $\frac{dp}{d\tau}$ of $\frac{dp}{dx}$ enz., dan hebben wij

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{Vx}}+\frac{\partial f}{\partial x_{V\tau}}\frac{dx}{d\tau}+\frac{\partial f}{\partial V_{x\tau}}\frac{dV}{d\tau}=0 \text{ en } \frac{\partial F}{\partial \tau_{Vx}}+\frac{\partial F}{\partial x_{Vx}}\frac{dx}{d\tau}+\frac{\partial F}{\partial V_{x\tau}}\frac{dV}{d\tau}=0$$

of

$$\frac{d\tau}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial V}\\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial V}\end{vmatrix}}=\frac{dx}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial V} & \frac{\partial f}{\partial \tau}\\ \frac{\partial F}{\partial V} & \frac{\partial F}{\partial \tau}\end{vmatrix}}=\frac{dV}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial \tau} & \frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial F}{\partial \tau} & \frac{\partial F}{\partial x}\end{vmatrix}}$$

Daar de bijzondere punten der plooipuntslijn voorkomen als $\frac{\partial f}{\partial V}$ of $\frac{\partial f}{\partial x}$ of beiden gelijk nul zijn, zullen wij den invloed dezer onderstellingen op de waarden van $\frac{\partial x}{\partial \tau}$ of $\frac{\partial V}{\partial \tau}$ nagaan.

Zij $\frac{\partial f}{\partial V}=0$, dan vinden wij $\frac{dx}{d\tau}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$. De waarde van $\frac{dx}{d\tau}$ kan in dat geval dus uit de vergelijking der spinodale lijn alleen gevonden worden; de waarde van $\frac{dV}{d\tau}$ met behulp der betrekking $F=0$. Men vindt dan $\frac{dV}{d\tau}=\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \tau}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial V}}$. Deze waarde van

[1]) Archives Neerl. XXIV, pag. 48.

$\frac{dV}{dr}$ is daar $\frac{\partial f}{\partial r}$ van nul verschillend gedacht wordt en ook

$\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{\partial^2 f}{\partial V^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial V^2}$ van nul verschilt, niet oneindig groot.

Men vindt dan:

$$r\frac{dx}{dr} = -\frac{r\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial f}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r \partial V}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial V^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V}\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial V}}$$

Voor het geval van maximum- of minimumdruk is behalve $\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}$ ook $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V}$ gelijk nul, en wordt

$$r\frac{dx}{dr} = \frac{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2}}{\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial V^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Het is niet moeielijk aan te toonen, dat deze laatste vergelijking niet anders beteekent, dan

$$\frac{\partial^2 p}{\partial V \partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial^2 p}{\partial V \partial r} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

of

$$d\left(-\frac{\partial p}{\partial V}\right) = d\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}\right) = 0$$

Mocht men dus $\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}$ als ordinaat nemen, als x de abscis voorstelt, dan geeft dit een kromme die voor al de punten der plooipuntstoestanden positief moet zijn, omdat $\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} = \frac{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V}\right)}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}$ is; maar die aan het begin en eind gelijk nul is, en die bovendien voor die waarde van x die met de maximumdrukking overeenkomt, aan de x-as raakt.

Om (7) uit (6) af te leiden merken wij op, dat

$$p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial V_{x\tau}} = \tau \frac{\partial p}{\partial \tau_{Vx}}$$

of

$$\frac{\partial p}{\partial V} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} = \tau \frac{\partial\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)}{\partial \tau}$$

terwijl $\frac{\partial p}{\partial V} = 0$ is.

Wij kunnen de beteekenis van (6) nog in een ander licht stellen. Beschouwen wij elk mengsel als een onsplitsbare stof, dan zou de kritische toestand eischen dat $\frac{\partial \psi^2}{\partial V^2}$ en $\frac{\partial^3 \psi}{\partial V^3}$ gelijk nul ware. Construeeren wij de kritische temperatuur, zooals die dan zou gevonden worden, als kromme met x tot abscis, dus volgens mijn onderstellingen de functie $\frac{8}{27}\frac{a_x}{b_x}$, dan zal de plooipuntstemperatuur als kromme geconstrueerd steeds punten leveren die hooger liggen. Alleen in het begin en aan het eind vallen de twee krommen samen, terwijl zij bovendien voor die waarde van x, die als de limietwaarde van de gelijke samenstellingen van vloeistof en damp mag beschouwd worden, aan elkander raken.

Ofschoon dit nauwelijks bevestiging behoeft, zal ik door gebruik te maken van de toestandsvergelijking $p = \frac{MRT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ nader toelichting geven.

Dan is

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} = -\frac{2a}{V^3} \text{ en } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial V^2} = \frac{4a\frac{db}{dx}}{(V-b)\;V^3} - \frac{\frac{2\,da}{dx}}{V^3}$$

of

$$\tau \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{-\frac{2}{V-b}\frac{db}{dx} + \frac{1}{a}\frac{da}{dx}}$$

Daar $V = 3\,b$ is, verkrijgen wij

$$\frac{d \log \tau}{dx} = \frac{d \log \frac{a}{b}}{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

In de nabijheid van deze waarde van x, zal dus de plooipuntstemperatuur niet merkbaar verschillen van $\frac{8}{27}\frac{a}{b}$, en daar zij ook voor $x = 0$ en $x = 1$ daarmede samenvalt, zal men wel in het algemeen kunnen verwachten dat de verschillen gering zullen blijven. Als de functie $\frac{a}{b}$ een minimum of maximum vertoont, zal dit dus ook van de plooipuntstemperatuur kunnen gewacht worden.

Zoeken wij den vorm, die voor (6) in de plaats moet komen, aan den kant van het ψ vlak, waar dus wel $\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2} = 0$ is, maar tegelijk $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \infty$, dan vinden wij

$$\tau \frac{dx}{d\tau} = \frac{\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial V^2}}{\frac{\partial^3\psi}{\partial x\, \partial V^2} + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial V}\right)^2 \lim \frac{\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}}{\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^2}}$$

En daar $\lim \frac{\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}}{\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^2} = -\frac{1-2x}{MRT}$, wat voor $x = 0$ gelijk is aan $-\frac{1}{MRT}$ en voor $x = 1$ gelijk is aan $\frac{1}{MRT}$, wordt

$$\tau \left(\frac{dx}{d\tau}\right)_o = \frac{\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial V^2}}{\frac{\partial^3\psi}{\partial x\, \partial V^2} - \frac{1}{MRT}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial V}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Hieruit leiden wij af

$$\frac{d\left(-\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{x\tau}}{dx_o} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2_{v\tau}}{MRT} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Dus zoodra een stof door een bijmengsel verontreinigd is, zal de kritische toestand niet aanwezig zijn bij $\frac{\partial p}{\partial V} = 0$, maar zal $-\frac{\partial p}{\partial V}$

positief moeten zijn. Het uitzonderingsgeval op dezen regel is uit het voorgaande duidelijk.

Met behulp der toestandsvergelijking vindt men uit (9)

$$\frac{d \log \tau}{dx_0} = \frac{d \log \frac{a}{b}}{dx_0} + \frac{9}{16} \left(\frac{d \log \frac{a}{b^2/_3}}{dx_0} \right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Stelt men in de toestandsvergelijking a met de temperatuur veranderlijk, dus $p = \frac{MRT}{V-b} - \frac{a\,\varphi(\tau)}{V^2}$, dan is

$$\varepsilon = - \frac{a\,[\varphi(\tau) - \tau\,\varphi'(\tau)]}{V}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} = \frac{a\,[\varphi(\tau) - \tau\,\varphi'(\tau)]}{V^2}$$

en

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} = - \frac{2\,a\,[\varphi(\tau) - \tau\,\varphi'(\tau)]}{V^3}$$

en zou vergelijking (8) veranderen in

$$\frac{d \log \frac{\tau}{\varphi(\tau)}}{dx} = \frac{d \log \frac{a}{b}}{dx}$$

en (11) een daaraan beantwoordende verandering ondergaan.

Zijn $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial v}$ beiden gelijk nul, dan is $\frac{dx}{d\tau}$ gelijk ∞, hetgeen beteekent, dat de plooipuntstemperatuur als functie van x beschouwd in dat geval een maximum of minimum is.

Denken wij ons den plooipuntsdruk als functie van x, dan volgt uit het voorgaande, dat, niet alleen voor $x = 0$ en $x = 1$, maar ook voor de waarde van x_B die aan de phasen van gelijke samenstelling beantwoord, deze lijn samenvallen moet met de lijn die den kritischen druk zou voorstellen voor elk der mengsels als enkelvoudige stoffen gedacht van dezelfde waarde van a_x en b_x. Daarenboven zouden beide lijnen elkander in x_B raken [1]).

---

[1]) Het bestaan der lengteplooi kan ten gevolge hebben, dat wat hier als één lijn beschouwd wordt in werkelijkheid in twee lijnen uiteen valt, waarvan de één bij $x = 0$ en de ander bij $x = 1$ begint.

Daar $\frac{dp}{d\tau}$ voor dat punt gelijk is aan $\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_{Vx}$ en $\tau\frac{dx}{d\tau} = \frac{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2}}{\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial V^2}}$

vindt men $\frac{dp}{dx} = \frac{p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial V_{x\tau}}}{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2}} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial V^2}$.

Stellen wij $p = \frac{MRT}{V-b} - \frac{a\varphi(\tau)}{V^2}$; nu volgt, daar $\frac{\partial f}{\partial V} = 0$ is, terwijl $\frac{\partial f}{\partial x} \gtrless 0$, uit $F = 0$ zoowel $\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}$ als $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial V}$ gelijk 0, terwijl verder uit $\frac{\partial f}{\partial V} = 0$ volgt dat ook $\frac{\partial^3 \psi}{\partial V^3}$ gelijk nul is. Uit de twee voorwaarden $\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2}$ en $\frac{\partial^3 \psi}{\partial V^3}$ gelijk nul, leiden wij af $V = 3b$, $MRT = \frac{8}{27}\frac{a}{b}\varphi(\tau)$ en $p = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2}\varphi(\tau)$. Verder vinden wij $p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial V_{x\tau}} = p + \frac{a}{V^2}[\varphi(\tau) - \tau\varphi'(\tau)]$ en kunnen wij schrijven:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = \left\{1 + \frac{a}{pV^2}[\varphi(\tau) - \tau\varphi'(\tau)]\right\}\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dx} - \frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right)\frac{\varphi(\tau)}{\varphi(\tau) - \tau\varphi'(\tau)}$$

Nu hebben wij verder de volgende betrekkingen:

$$\frac{a\varphi(\tau)}{pV^2} = 3 \text{ en } \frac{d\tau}{\tau\, dx} - \frac{\varphi'(\tau)\, d\tau}{\varphi(\tau)\, dx} = \frac{1}{a}\frac{da}{dx} - \frac{1}{b}\frac{db}{dx}$$

zoodat $\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = \frac{4}{a}\frac{da}{dx} - \frac{4}{b}\frac{db}{dx} + \frac{d\log\varphi(\tau)}{dx}$ is voor den plooipuntsdruk, terwijl wij voor den kritischen druk van een onsplitsbare stof zouden vinden

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\frac{da}{dx} - \frac{2}{b}\frac{db}{dx} + \frac{d\log\varphi(\tau)}{dx}$$

Dat is gelijk, als $\frac{3}{a}\frac{da}{dx} = \frac{2}{b}\frac{db}{dx}$. Deze voorwaarde is echter geen nieuwe, maar volgt uit $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial V} = 0$.

Is zoowel $\frac{\partial f}{\partial x}$ als $\frac{\partial f}{\partial V}$ gelijk nul, dan volgt daaruit niet een maximum of minimumwaarde voor $\frac{dp}{dx}$. De algemeene waarde van deze grootheid is

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial V} - \frac{\frac{\partial f}{\partial V}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial V}\frac{\partial f}{\partial \tau}}$$

en dus voor $\frac{\partial f}{\partial V}$ en $\frac{\partial f}{\partial x}$ gelijk nul

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x_{V\tau}}\left\{1 + \frac{dx}{dV_p}\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial V}}\right\} = \frac{\partial p}{\partial x_{V\tau}}\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial V^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial V}\left(\frac{dx}{dV}\right)_p + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{\partial V}\right)_p^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial V^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial V}\left(\frac{dx}{dV}\right)_p}$$

De teller dezer laatste breuk zou slechts dan nul zijn, als men voor $\frac{dx}{dV_p}$ substitueerde de waarde van $\frac{dx}{dV}$, die bij de elkander snijdende takken der spinodale lijn behoort, en zal dus van nul moeten verschillen.

De waarde $\frac{dp}{dx} = 0$ zal echter voorkomen als $\frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial p}{\partial x}$, maar dan is ook $\frac{dp}{d\tau} = 0$. Dit is door Kuenen ontmoet bij de plooipuntslijn voor mengsels van koolzuur en chloormethyl.

Uit dit alles blijkt dat, daar de kritische verschijnselen bij een mengsel verschillen van die van een enkele stof, de loop der functiën $\frac{a}{b}$ en $\frac{a}{b^2}$ geen volledig inzicht kunnen geven van den gang der lijnen $\tau = F_1(x)$ en $p = F_2(x)$.

Toch kunnen deze functiën aanwijzingen geven die van beteekenis zullen zijn. Zoo is het geheel in overeenstemming met wat uit den gang dezer functiën te wachten was, dat bij de plooipuntslijn van ethaan en N_2O de waarde van x, waarvoor τ een minimum is, meer ligt naar de zijde van het ethaan dan de waarde van x, die aan

de gelijk samengestelde phasen behoort. De eerste waarde van x beantwoordt aan de vergelijking $\frac{1}{a}\frac{da}{dx}-\frac{1}{b}\frac{db}{dx}=0$. De tweede aan $\frac{1}{a}\frac{da}{dx}-\frac{2}{3}\frac{db}{dx}=\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dx}-\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right)+\frac{1}{3}\frac{db}{dx}=0$. Als wij x rekenen van N_2O naar ethaan, is $\frac{db}{dx}$ positief, en ligt de waarde van x die $\frac{1}{a}\frac{da}{dr}=\frac{2}{3}\frac{db}{dx}$ maakt, vóór die welke $\frac{1}{a}\frac{da}{dx}=\frac{1}{b}\frac{db}{dx}$ maakt. Evenzoo zal aan

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dx}-\frac{2}{b}\frac{db}{dx}=\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dx}-\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right)-\frac{1}{b}\frac{db}{dx}=0$$

slechts kunnen voldaan worden door een waarde van x die grooter is, dan die der minimumtemperatuur. De grootheid p als functie van x zal dus langer moeten blijven dalen, en heeft zelfs bij $x=1$ de minimumwaarde nog niet bereikt. Ook is het met de eigenschappen der genoemde functiën in overeenstemming, dat $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial V}=0$ tot een maximumwaarde behoort, daar zij bepaald wordt door $-\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dx}-\frac{2}{3}\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right)$.

— Voor de boekerij der Akademie worden aangeboden: door den Heer J. A. C. Oudemans het 4e deel der Triangulatie van Java, bevattende een nauwkeurig onderzoek omtrent de daarbij benoodigde instrumenten; eene kritische beschouwing van de fouten der verdeelingen en der daarmêe gedane waarnemingen; bepaling van de lengte van Batavia met betrekking tot Greenwich ($7^0\ 7'\ 14^1/_2''$); en door den Heer Engelmann, namens Dr. H. Zwaardemaker, „Die Physiologie des Geruchs”.

— De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN.

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 28 September 1895.

Voorzitter (waarnemend): de Heer J. D. VAN DER WAALS.
Secretaris: de Heer C. A. J. A. OUDEMANS.

Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Kennisgeving van het overlijden van wijlen het rustend Lid der Afdeeling Prof. Dr. D. BIERENS DE HAAN. De Voorzitter herdenkt den overledene in zijn arbeidzaam leven en schetst in korte woorden wat de Wiskunde aan hem verplicht is, en hoe hij vooral ook de verdiensten van de Nederlandsche wiskundigen in zijne bibliographische schetsen in het licht wist te stellen. Dankbaar zijn en blijven hem ook zijne medeleden der Huyghens-Commissie voor het leeuwendeel, dat hij aan de door de Hollandsche Maatschappij der Weten-

schappen te Haarlem bezorgde uitgave van Huyghen's werken gehad heeft. De Akademie brengt hulde aan zijne nagedachtenis en aan zijn nooit verflauwenden ijver om te bereiken wat hij zich had voorgesteld.

2⁰. Kennisgeving van de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN, HOOGEWERFF en TREUB, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

3⁰. Brief van dankzegging van den Heer Dr. C. EYKMAN te Weltevreden bij Batavia (8 Juni 1895), voor zijne benoeming tot Correspondent.

4⁰. Brieven van dankzegging van den Heer L. PASTEUR (13 Juli en 2 September 1895) voor de hem toegekende en toegezonden Leeuwenhoek-Medaille.

5⁰. Circulaire van de Royal Society (15 Augustus 1895), waarin de uitkomst wordt medegedeeld der bemoeiingen van het „International Catalogue Committee", en het adres wordt meêgedeeld, door de Royal Society tot Lord SALISBURY gericht, met het doel om ondersteuning bij haar pogen te ontvangen van de Britsche Regeering.

6⁰. Brief van den Heer W. H. A. MENKENS te Enschede (22 Augustus 1895), met verzoek om inlichting over het bestaan van eene bijzondere soort van magneten. De Voorzitter meent dat van de Afdeeling niet gevergd kan worden, dat zij over dergelijke onderwerpen met particulieren in onderhandeling trede en stelt voor, den Heer MENKENS van dit standpunt mededeeling te doen, en hem in bedenking te geven, zich met zijne vraag tot een der physische leden te richten. Aldus wordt besloten.

7⁰. Een opstel van den Heer FRANZ LESSKA te Debreczin, getiteld: Integral-Aufgaben. Ter visie voor de mathematische leden.

8⁰. Twee brochures van den Heer Dr. J. MOUNT BLEYER te New-York, begeleid van een schrijven, waarin het verlangen wordt uitgedrukt om tot Correspondent der Afdeeling te worden benoemd. De Voorzitter stelt voor, de Heer BLEYER dank te zeggen voor zijne brochures, en mede te deelen dat het Reglement der Akademie niet toestaat aan zijn wensch gevolg te geven.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES spreekt: *„Over optellingstheorema's voor elliptische integralen".*

1. Wanneer men, op het voetspoor van ABEL, een optellingstheorema wil afleiden voor de elliptische integraal der eerste soort,

$$\int_0^x \frac{dx}{y} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

dan heeft men te letten op het stelsel der snijpunten van de kromme

$$y = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

met eene algebraische kromme van bepaalden graad en veranderlijken vorm; de coëfficienten der vergelijking, welke die kromme voorstelt, zijn dus als veranderlijken te beschouwen. Deze vergelijking moet zoo gekozen worden, dat zij voor bepaalde waarden der coëfficienten eene kromme levert, waarvan alle veranderlijke snijpunten samenvallen, en door $x = 0$ bepaald worden. Het komt mij voor, dat deze noodzakelijke beperking in de keus der snijkromme niet voldoende in het licht gesteld is in de werken, waar ik de methode van ABEL zag toegepast.

In het volgende wensch ik aan te toonen, hoe de bekende optellingstheorema's voor drie elliptische integralen van dezelfde soort kunnen gevonden worden met behulp van de veranderlijke parabool

$$y = ax^2 + bx + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$\varphi(x) = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2) - (ax^2 + bx + c)^2 = 0 \quad . \quad . \quad (3)$$

of

$$\varphi(x) = (k^2 - a^2) x^4 - 2\, abx^3 - (2ac + b^2 + k^2 + 1) x^2 - 2\, bcx + (1 - c^2) = 0 \; . \; (4)$$

Deze vergelijking heeft vier wortels $x = 0$, zoodra

$$c = \pm 1, \quad b = 0, \quad 2\, ac + b^2 + k^2 + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Beschouwt men den wortel x_m van (3) als functie van a, b en c, dan heeft men de betrekking

$$\varphi'(x_m)\, dx_m - 2\,(ax^2_m + bx_m + c)\,(x^2_m\, da + x_m\, db + dc) = 0 \quad . \quad (6)$$

of, met het oog op (1) en (2),

$$\frac{\varepsilon_m\, dx_m}{\sqrt{(1 - x^2_m)(1 - k^2 x^2_m)}} = 2\, \frac{x^2_m\, da + x_m\, db + dc}{\varphi'(x_m)} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waar $\varepsilon_m = \pm 1$.

Daar nu, volgens een bekend theorema van EULER,

$$\sum_{m=1}^{m=4} \frac{x_m^p}{\varphi'(x_m)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

als $p < 3$ (de graad van den noemer), heeft men

$$\sum_{1}^{4} \frac{\varepsilon_m \, dx_m}{y_m} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Laat men nu a, b, c veranderen van de waarden (5) tot een willekeurig drietal waarden, waarbij wortels x_1 x_2 x_3 x_4 behooren, dan levert (9)

$$\varepsilon_1 \int_0^{x_1} \frac{dx}{y} + \varepsilon_2 \int_0^{x_2} \frac{dx}{y} + \varepsilon_3 \int_0^{x_3} \frac{dx}{y} + \varepsilon_4 \int_0^{x_4} \frac{dx}{y} = 0 \quad . \quad . \quad (10)$$

Hier kunnen slechts drie der ε_m willekeurig gekozen worden. Immers van de vier vergelijkingen

$$ax_m^2 + bx_m + c - \varepsilon_m \sqrt{(1 - x_m^2)(1 - k^2 x_m^2)} = 0 \quad . \quad . \quad (11)$$

kunnen drie gebruikt worden om a, b en c te bepalen uit willekeurig gekozen waarden van x_1 x_2 x_3 ε_1 ε_2 ε_3; dan is x_4 door (4) bepaald, en volgt ε_4 uit de laatste vergelijking van (11).

Stelt men b.v. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$, en neemt in aanmerking, dat voor $x_2 = x_3 = 0$, $b = 0$, dus $x_4 = -x_1$ (zie (4)), zoodat $\int_0^{x_4} \frac{dx}{y} = -\int_0^{x_1} \frac{dx}{y}$, dan blijkt $\varepsilon_4 = 1$ te zijn.

Voor

$$\sum_{1}^{4} \int_0^{x_m} \frac{dx}{y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

heeft men derhalve, volgens (11), de betrekking

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \\ x_4^2 & x_4 & 1 & y_4 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad (13)$$

Wordt $\int_0^{x_m} \frac{dx}{y} = u_m$ gesteld, zoodat $x_m = sn\, u_m$ en $y_m = \sqrt{(1 - x_m^2)}$ $(1 - k^2 x_m^2) = cn\, u_m\, dn\, u_m$, dan volgt uit het voorgaande:

Als

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0, \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

is

$$\begin{vmatrix} 1 & sn\, u_1 & sn^2\, u_1 & cn\, u_1\, dn\, u_1 \\ 1 & sn\, u_2 & sn^2\, u_2 & cn\, u_2\, dn\, u_2 \\ 1 & sn\, u_3 & sn^2\, u_3 & cn\, u_3\, dn\, u_3 \\ 1 & sn\, u_4 & sn^2\, u_4 & cn\, u_4\, dn\, u_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (15)$$

2. Neemt men $c = 1$, dan heeft (4) steeds een wortel *nul*, en in (12) vervalt een der integralen.

Dan volgt uit (4)

$$(k^2 - a^2)(x_1 + x_2 + x_3) = 2\, ab \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

$$(k^2 - a^2)\, x_1 x_2 x_3 = 2\, b \,. \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

waaruit

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{ax_1\, x_2 - 1} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Verder heeft men

$$\left.\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + 1 &= y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + 1 &= y_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

zoodat

$$ax_1\, x_2\, (x_1 - x_2) = x_2\, y_1 - x_1\, y_2 + x_1 - x_2 \quad \ldots \quad (20)$$

Door eliminatie van a vindt men uit (18 en (20)

$$x_3 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_2\, y_1 - x_1\, y_2} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

Daar $x_2^2\, y_1^2 - x_1^2\, y_2^2 = (x_2^2 - x_1^2)\,(1 - k^2\, x_1^2\, x_2^2)$, verkrijgt men ten slotte

$$x_3 = - \frac{x_1\, y_2 + x_2\, y_1}{1 - k^2\, x_1^2\, x_2^2} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Nu is in (14) $u_4 = 0$, dus $u_3 = -(u_1 + u_2)$, zoodat $x_3 = sn\, u_3 = - sn\,(u_1 + u_2)$. Derhalve levert (22) de bekende formule

$$sn\,(u_1 + u_2) = \frac{sn\, u_1\; cn\, u_2\; dn\, u_2 + sn\, u_2\; cn\, u_1\; dn\, u_1}{1 - k^2\; sn^2\, u_1\; sn^2\, u_2} \quad . \; . \quad (23)$$

De uitdrukkingen voor $cn\,(u_1 + u_2)$ en $dn\,(u_1 + u_2)$ kunnen, door eenvoudige herleidingen, uit (23) gevonden worden.

Een symmetrische formule vindt men uit (15) door $u_4 = 0$ te stellen, of, rechtstreeks, door eliminatie van a en b uit de drie vergelijkingen

$$a x_m^2 + b x_m + (1 - y_m) = 0.$$

Men verkrijgt zoodoende de volgende uitkomst:

Voor $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, wordt

$$\begin{vmatrix} sn\, u_1 & sn^2 u_1 & cn\, u_1\; dn\, u_1 - 1 \\ sn\, u_2 & sn^2\, u_2 & cn\, u_2\; dn\, u_2 - 1 \\ sn\, u_3 & sn^2\, u_3 & cn\, u_3\; dn\, u_3 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \quad (24)$$

3. Om tot een optellingstheorema voor de elliptische integralen der *tweede* soort te geraken, vermenigvuldig ik (7) met $1 - k^2 x_m^2$, en stel weer $\varepsilon_m = +1$. Dan wordt, als men ter bekorting den aanwijzer m laat vervallen,

$$dx \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} = \frac{(x^2\, da + x\, db + dc)\,(1 - k^2 x^2)}{2\,(k^2 - a^2)\, x^3 - 3\, ab\, x^2 - (2\, ac + b^2 + k^2 + 1)\, x - bc}. \quad (25)$$

Hiervoor kan geschreven worden

$$dx \sqrt{X} = -\frac{k^2\, x\, da}{2\,(k^2 - a^2)} - \frac{3\, ab\, k^2\, da}{4\,(k^2 - a^2)^2} - \frac{k^2\, db}{2\,(k^2 - a^2)} + \frac{\psi\,(x)}{\varphi'\,(x)} \;. \quad (26)$$

$\psi\,(x)$ is eene functie van den tweeden graad, zoodat, volgens het bovengenoemde theorema van Euler, (8),

$$\sum_1^4 \frac{\psi\,(x_m)}{\varphi'(x_m)} = 0.$$

Daar verder $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{2\,ab}{k^2 - a^2}$, levert de optelling der vier vergelijkingen (26)

$$\sum_1^4 dx_m \sqrt{X_m} = -\,2\,k^2 \frac{(k^2 - a^2)\,db + 2\,ab\,da}{(k^2 - a^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Hieruit door integratie

$$\sum_1^4 \int_0^{x_m} dx \sqrt{X} = C - 2\,k^2 \frac{b}{k^2 - a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Zijn alle wortels x_m van (4) gelijk aan nul, dan verdwijnt het linker lid van (28), en is $b = 0$; bijgevolg is ook

$$C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

wordt weer $c = 1$ genomen, dan levert (4)

$$x_1\,x_2\,x_3 = \frac{2\,b}{k^2 - a^2},$$

zoodat

$$\sum_1^3 \int_0^{x_m} dx \sqrt{\frac{1 - k^2\,x^2}{1 - x^2}} = -\,k^2\,x_1\,x_2\,x_3 \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

met de voorwaarden

$$a\,x_m^2 + b\,x_m + 1 = \sqrt{(1 - x_m^2)\,(1 - k^2\,x_m^2)}. \quad . \quad . \quad (31)$$

Stelt men, als boven,

$$\int_0^{x_m} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)\,(1 - k^2\,x^2)}} = u_m,$$

waardoor

$$\int_0^{x_m} dx \sqrt{\frac{1 - k^2\,x^2}{1 - x^2}} = \int_0^{u_m} dn^2\,u\,du = E\,(u_m),$$

dan gaat (30) over in de bekende formule

$$E(u_1) + E(u_2) + E(u_3) = -k^2 \, sn\, u_1 \, sn\, u_2 \, sn\, u_3 \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

waar

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Dus ook

$$E(u_1 + u_2) = E(u_1) + E(u_2) - k^2 \, sn\, u_1 \, sn\, u_2 \, sn\, (u_1 + u_2) \quad . \quad (33)$$

4. Ten slotte wil ik een optellingstheorema afleiden voor de integraal der *derde* soort

$$\int_0^x \frac{dx}{(x^2 - n^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \int_0^x z\, dx.$$

Uit (7) volgt, in de onderstelling, dat $c = 1$,

$$z\, dx = 2 \, \frac{x^2\, da + x\, db}{(x^2 - n^2)\, \varphi'(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

of

$$z\, dx = \frac{2\, da}{\varphi'(x)} + \frac{db - n\, da}{x + n} + \frac{db + n\, da}{x - n} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Daar algemeen

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \sum \frac{1}{(x - x_m)\, \varphi'(x_m)},$$

is

$$\sum \frac{n\, da - db}{(-n - x_m)\, \varphi'(x_m)} = \frac{n\, da - db}{\varphi(-n)}$$

$$\sum \frac{n\, da + db}{(n - x_m)\, \varphi'(x_m)} = \frac{n\, da + db}{\varphi(n)},$$

terwijl $\sum \frac{da}{\varphi'(x)}$ weer, volgens (8), verdwijnt.

Wordt nog, ter bekorting,

$$(1 - n^2)(1 - k^2 n^2) = N^2$$

gesteld, dan vindt men uit (35)

$$n \sum_1^3 \int_0^{x_m} z\, dx = \int \frac{n^2 da - n\, db}{N^2 - (an^2 - bn + 1)^2} - \int \frac{n^2 da + n\, db}{N^2 - (an^2 + bn + 1)^2}$$

of

$$n \sum_1^3 \int_0^{x_m} \frac{dx}{(x^2 - n^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = bg\, sin \frac{an^2 - bn + 1}{N} -$$

$$- bg\, sin \frac{an^2 + bn + 1}{N} \quad . \quad (36)$$

De integratieconstante is nul, omdat voor $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ook $b = 0$ wordt, waardoor de beide *bg sin* hetzelfde argument krijgen.

In (36) zijn a en b als functies van $x_1\, x_2\, x_3$ bepaald door (zie (16) en (17))

$$a = (x_1 + x_2 + x_3) : x_1\, x_2\, x_3$$

$$b = \tfrac{1}{2}(k^2 - a^2)\, x_1\, x_2\, x_3$$

Natuurkunde. — De Heer Kamerlingh Onnes biedt namens den Heer Dr. A. Lebret een opstel aan betreffende een onderzoek verricht in het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: „*Over de verandering van het Hall-effect in bismuth met de temperatuur*" en uitvoeriger beschreven in diens proefschrift van 12 Juli 1895 [1]).

Voorloopige getallen, hierop betrekking hebbende, zijn medegedeeld in de zitting van 26 Januari 1895. De methode, volgens welke de waarnemingen zijn verricht, is beschreven in het zittingsverslag van 18 April 1895.

Voor het verkrijgen van de lage temperaturen werd gebruik gemaakt van eene oplossing van vast koolzuur in alcohol; de hooge temperaturen werden verkregen met behulp van een vloeistofbad van glycerine.

Een hard gesoldeerde roodkoperen bak, die reeds in de mededee-

[1]) Metingen over het verschijnsel van Hall in Bismuth. Leiden 1895.

ling van April kortelings is beschreven en uitvoeriger in mijn proefschrift op pag. 61 enz., diende voor de opname zoowel van de vloeistof voor de hooge als van die voor de lage temperaturen.

Twee plaatjes bismuth zijn onderzocht, uit verschillende bron afkomstig. Het eene is vervaardigd uit hetzelfde bismuth als waaruit het plaatje werd gemaakt, dat diende voor de voorloopige waarnemingen, medegedeeld in Januari. Wij noemen dit bismuth I. Het bismuth, waaruit het tweede plaatje is gemaakt, noemen wij bismuth II.

De volgende getallen zijn verkregen voor de HALL-constante bij verschillende temperaturen, vergeleken met die bij 21°, welke wij R^{I}_{21} zullen noemen, bij het eerste en R^{II}_{21} bij het tweede plaatje.

Magnetisch veld ongeveer 3000 (e. g. s.)

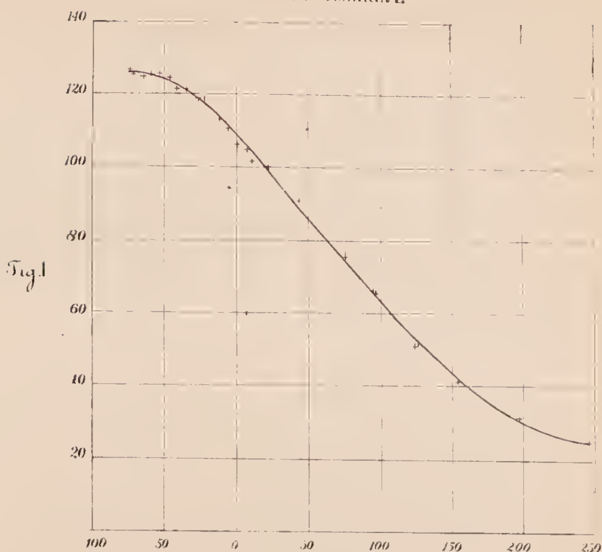
Plaatje Bismuth I.

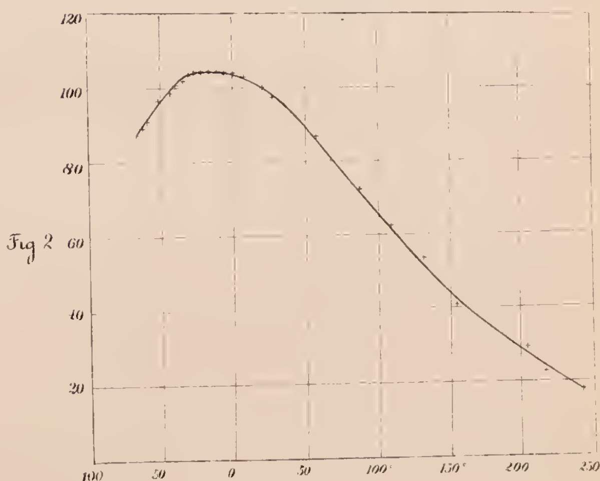
α. Lage temperaturen.

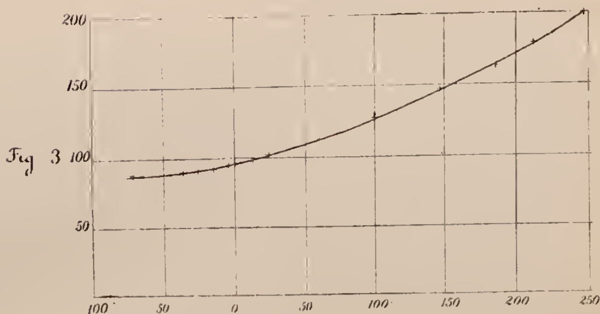
Temperatuur.	Constante van HALL.
— 74 °.	1.256 R^{I}_{21}
— 72 °.	1.250
— 65.5°.	1.245
— 58.5°.	1.246
— 52.5°.	1.244
— 47.5°.	1.241
— 40.5°.	1.211
— 36 °.	1.211
— 27.5°.	1.190
— 23 °.	1.180
— 14 °.	1.139
— 7.5°.	1.110
0 °.	1.056
+ 7 °.	1.050
+ 11 °.	1.046

β. Hooge temperaturen.

21 °.	R^{I}_{21}
246.5°.	0,280 R^{I}_{21}
95 °.	0.697
157.5°.	0.411
198.5°.	0.313







Lith. Eduard IJdo, Leiden

124 °.	0.532
93 °.	0.700
76 °.	0.784
43.5°.	0.927
11.5°.	1.052

Plaatje Bismuth II.

α. Lage temperaturen.

— 69 °.	0.866	R^{II}_{21}
— 64 °.	0.889	
— 59 °.	0.915	
— 51 °.	0 970	
— 47 °.	0.985	
— 41.5°.	1.007	
— 35.5°.	1.016	
— 31.5°.	1.030	
— 25 °.	1.032	
— 19.5°.	1.034	
— 12 °.	1.040	
— 8 °.	1.034	
— 4 °.	1.034	
+ 0.5°.	1.034	
+ 7.5°.	1.028	
+ 21.5°.	1.002	

β. Hooge temperaturen.

26.5°.	0.980	R^{II}_{21}
203 °.	0.288	
242.5°.	0.175	
219 °.	0.217	
124.5°.	0.540	
105 °.	0.634	
84.5°.	0.725	
56.5°.	0.869	
22.5°.	0.996	
152 °.	0.429	

De waarnemingen zijn in deze tabellen gerangschikt in de volgorde, waarin zij werden verricht.

Om het overzicht gemakkelijker te maken, zijn zij in graphische voorstelling [1]) gebracht in de hierbij gevoegde plaat.

De HALL-constante in bismuth I blijkt niet eene lineaire functie van de temperatuur te zijn, zooals de voorloopige, vroeger medegedeelde waarnemingen deden vermoeden. De afwijking van de rechte lijn is evenwel eerst duidelijk merkbaar bij temperaturen onder — 38°: de laagste temperatuur bij welke eene voorloopige waarneming was verricht. De overeenstemming van de vroeger verkregen waarden met de nieuw gevondene is zeer voldoende. Bij de beoordeeling hiervan lette men er op dat nu als eenheid is aangenomen de waarde van de HALL-constante bij 21° en vroeger die bij 14°.

Het verloop van de HALL-constante in bismuth II komt bij de temperaturen boven 20° overeen met dat van de HALL-constante in bismuth I. Daarentegen constateeren wij zeer duidelijk bij ongeveer — 20° een maximum en bij lagere temperaturen een merkbaar kleiner bedrag van de HALL-constante.

Bij bismuth I zou het bestaan van een maximum waarschijnlijk duidelijk blijken zoo wij bij nog lagere temperaturen hadden waargenomen.

DRUDE en NERNST [2]) vonden een maximum van het HALL-effect in bismuth bij ongeveer 100°. De waarde, die na afkoeling van het plaatje werd gevonden, was evenwel niet dezelfde als die voor de verwarming was waargenomen.

Volgens LEDUC [3]) zou de maximum-waarde bij 29° liggen.

CLOUGH en HALL [4]) vonden bij nikkel een maximum-waarde van het HALL-effect tusschen 170° en 200°, en bij staal steeds toename bij verwarming tot de hoogste temperatuur (319°) waarbij werd waargenomen. HALL [5]) vond die toename ook bij kobalt binnen de meer beperkte grenzen waarbij die waarnemingen zijn verricht. Daar voor den gesmolten toestand [6]) de HALL-coëfficiënt nul schijnt te zijn, moeten deze beide metalen dus ook bij een of andere temperatuur een maximum-waarde van het HALL-effect vertoonen.

Zoo nu nog eene maximum-waarde wordt gevonden bij het antimonium, welke dan waarschijnlijk bij lage temperatuur zou blijken

---

[1]) Zie de graphische voorstellingen 1 en 2.

[2]) Wied. Ann. 42, p. 568. 1891.

[3]) C. R. 102, p. 358. 1886.

[4]) Proc. of the Americ. Acad. 20, p. 189. 1893.

[5]) Phil. Mag. 15, p. 341. 1883.
Sill. Journ. 29, p. 117. 1885.

[6]) Zie Wied. Ann. 42, p. 568. 1891.

te liggen, bij welke nog geene waarnemingen voor dit metaal zijn verricht, dan zou hiermee proefondervindelijk zijn bewezen dat het HALL-effect in alle metalen, waarin dit eene groote waarde heeft, eene maximum-waarde bij een of andere temperatuur vertoont, welke vele malen grooter is dan de waarde bij temperaturen, ver daarvan verwijderd.

Het chemisch onderzoek [1]) van de beide bismuthsoorten leerde dat in bismuth I sporen ijzer te vinden waren, te weinig om te kunnen worden gewogen; in bismuth II werden geene andere stoffen aangetroffen.

De absolute waarde van het HALL-effeet in bismuth I bij 21° was ongeveer 7, dat in bismuth II 13 [2]).

Ten slotte zij hier nog vermeld dat ik ook den invloed van de temperatuur op den weerstand van bismuth I heb nagegaan. Ik vond aanleiding tot dit onderzoek in de door LEDUC [3]) uitgesproken meening, dat het verloop van den weerstand van bismuth met de temperatuur ongeveer hetzelfde zou zijn als dat van de HALL-eonstante Noemt men den weerstand w, de constante van HALL R, dan zou dus eene nieuwe grootheid $D = \frac{R}{w}$ bijna onafhankelijk van de temperatuur zijn.

Uit mijne waarnemingen is het tegendeel gebleken: de weerstand neemt bij verhoogen van de temperatuur toe, de constante van HALL neemt af.

De methode waarop de weerstand van een bismuthspiraaltje, verkregen door gesmolten bismuth in een glazen spiraaltje te gieten, werd gemeten, berust daarop dat de potentiaalverschillen aan de uiteinden van genoemd spiraaltje en aan de uiteinden van een bekenden weerstand worden vergeleken. Verbindt men de twee uiteinden van elk dezer weerstanden door een grooten weerstand langs een der twee van elkaar geisoleerde leidingen van een differentiaalgalvanometer, dan zal bij eene bepaalde keuze van den weerstand in een der galvanometerleidingen de magneetnaald in rust blijven.

Verandert de weerstand van het bismuthspiraaltje door afkoeling of verhitting, dan zal eene andere keuze van den weerstand in de

[1]) Dit onderzoek is welwillend verricht door den heer F. H. EYDMAN te Delft onder leiding van prof. HOOGEWERFF, hoogleeraar aan de Polytechnische School aldaar.

[2]) VON ETTINGSHAUSEN en NERNST geven op 10.1, HALL stelt 8.6. De invloed van de zuiverheid bleek reeds vroeger en ook thans uit mijne waarnemingen zeer groot te zijn.

[3]) Zie Lumière électrique 29, p. 230. 1888.

galvanometerleiding noodig zijn om de naald in rust te houden en hieruit kan de verandering van den weerstand van het bismuth onmiddellijk worden berekend.

Wij verkregen de volgende waarden, uitgedrukt in den weerstand bij 18°, welken wij r_{18} zullen noemen.

Temperatuur.	Weerstand.
— 76 °.	r_{18} × 0.88
— 71 °.	0.89
— 64 °.	0.895
— 44 °.	0.905
— 39 °.	0.91
— 25 °.	0.925
— 15,5 °.	0.935
— 5 °.	0.955
+ 7,5 °.	0.985
+ 10 °.	0.995
+ 20 °.	1.01
+ 51 °.	1.11
+ 99 °.	1.23
+ 147 °.	1.43
+ 174 °.	1.62
+ 217 °.	1.82
+ 246 °.	2.01

Deze getallen dienden tot samenstelling van de graphisehe voorstelling 3.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Prof. Dr. E. COHN en Dr. P. ZEEMAN aan eene mededeeling betreffende proeven, gedeeltelijk te Straatsburg, gedeeltelijk te Leiden verricht getiteld: *Beobachtungen über Ausbreitung electrischer Wellen im Wasser.*

Die Mehrzahl der zu besprechenden Beobachtungen ist von uns gemeinsam im Sommer 1893 in Strassburg angestellt worden. Eine Lücke in dem damals erhaltenen Beobachtungsmaterial hat der eine von uns (P. Z. in Leiden) durch einige neue Versuchsreihen ausgefüllt. Es handelte sich dem ursprünglichen Plane nach um Vorarbeiten zur Lösung von Fragen, die das Verhalten *leitender* Körper

betreffen, und die bisher nicht zum Abschlusz gebracht werden konnten. Aus einigen in neuerer Zeit veröffentlichten Arbeiten scheint uns aber hervorzugehen, dasz auch die für *reines Wasser* erhaltenen Resultate von Nutzen sein können.

Zur Methode.

Die Methode schlieszt sich eng an diejenige an welche in dem Aufsatz „Über die Ausbreitung electrischer Schwingungen im Wasser"[1]) dargelegt ist. Auf diesen Aufsatz musz bezüglich der Anordnung der Versuche verwiesen werden. Wir wünschten die Methode zu möglichster Genauigkeit auszubilden. Unsere Aufmerksamkeit richtete sich dabei auf drei Punkte:

Erstens wird bei der Berechnung der Brechungsexponenten vorausgesetzt, dasz sich die Wellen in einem seitlich unbegrenzten Medium fortpflanzen. Praktisch wird zunächst eine seitliche Begrenzung durch metallische Leiter nöthig. Hat diese die Form zweier concentrischer Cylinderflächen, so ist die entstehende mathematische Aufgabe noch lösbar: es zeigt sich, dasz für die Schwingungszahlen und die geometrischen Verhältnisse, welche in Frage kommen, die electrischen Kräfte merklich normal zur Cylinderaxe verlaufen, und dasz die Geschwindigkeit der Wellen derjenigen der unbegrenzten Welle merklich gleich ist. Man kann schlieszen, dasz das Gleiche noch gilt, wenn die Wellen an zwei parallellen Metalldrähten entlang gleiten, und das durchstrahlte Dielectricum (das Wasser) auszer durch diese Drähte seitlich nur durch, zu den Drahtaxen parallelle, *Metall*wände begrenzt ist. Tritt aber an Stelle der Letzteren ein anderer *Isolator*, (das Material der Wanne und dann die Luft), so wird nur noch der Versuch darüber Aufschlusz geben können, wie weit man sich dem Fall der unbegrenzten Welle genähert hat. Unsere ersten Versuche waren auf die Erledigung dieser Frage gerichtet. Sie bezogen sich auf Wellen von der in Luft gemessenen Halbwellenlänge $l_o = 188$ cm. Das Wasser befand sich[2]) in einer Wanne von 66 cm. Länge und 39 cm. Breite, die in verschiedenen Versuchsreihen bis zur Höhe

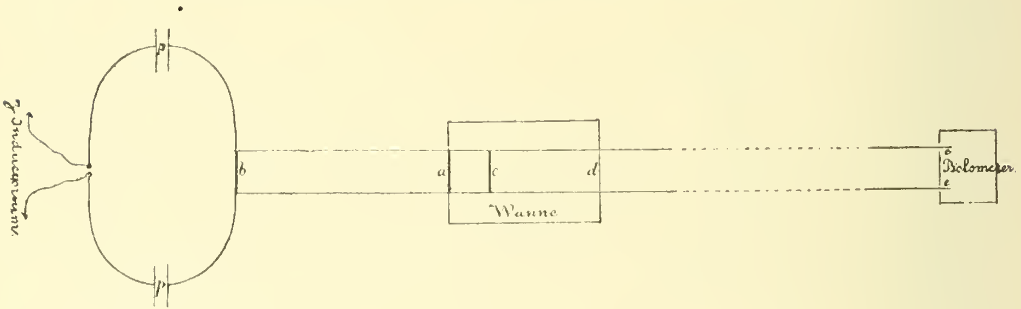
$$h = 18, 22, 28{,}5 \text{ cm.}$$

[1]) E. Cohn, Berliner Berichte, 3 December 1891; Wied. Ann. 45. p. 370 (1892).

[2]) Die folgenden Zahlen gelten für *alle* Versuchsreihen mit ausnahme der Reihe 1 der untenfolgenden Tabelle; in letzterer waren die Dimensionen: 51 cm. Länge, 35,5 cm. Breite, 28 cm. Wasserhöhe, 15 cm. Drahthöhe.

gefüllt wurde, während die Drähte stets 10 cm. über dem Boden verliefen. Eine systematische Änderung des scheinbaren Brechungsexponenten mit der Ausdehnung der Wassermasse fand sich nicht. Wir sahen deshalb von der Anbringung einer metallischen Hülle, welche das Beobachtungsverfahren complicirt haben würde, ab. Wir verkennen aber nicht, dasz aus der Gesammtheit der jetzt vorliegenden Zahlen eine geringe Änderung des scheinbaren Brechungsexponenten in dem zu erwartenden Sinne hervorzugehen scheint[1]).

Es war zweitens fraglich, ob das frühere Beobachtungsverfahren die Existenz *einer einzigen*, durch die in Luft abgegrenzte Drahtstrecke *a b* bestimmten Schwingung, im Wasser verbürgte[2]). Wir gaben deshalb[3]) dem ersten Stück *p b p* des „secundären Leiter" eine dem „primären Leiter" congruente Form, legten die *Brücke b fest*, und bestimmten die *Lage von a* durch Resonanz.



Eine Durchmusterung der Schwingungen jenseits *a* in Luft, (ehe die Wanne an ihren Platz gebracht war), ergab gleichwohl zuweilen, dasz sich hier mehrere Wellenlängen über einander gelagert hatten. Es ist uns nicht jedesmal gelungen, den Grund der Störung zu finden; wir haben aber nur für diejenigen Wellen Messungen im Wasser ausgeführt, welche eine reine Schwingung mit scharf ausgeprägtem Maximum ergaben.

Ein letztes Bedenken betraf die Störungen, welche die regelmässige Form der Wellen nothwendig durch die äusseren Belegungen und die Zuleitungsdrähte der kleinen „Leidener Flaschen" erfahren musz, die die Energie der Schwingungen aufnehmen und dem Bolometer zuführen. Man kann diese Flaschen vermeiden und *das Instrument völlig aus der auszumessenden Welle entfernen*, indem man

---

[1]) S. den Schlusz!

[2]) Vgl. Figur u. Zeichnung der citirten Abhandlung.

[3]) S. für das folgende die nebenstehende Figur.

die Paralleldrähte, längs deren die Welle fortschreitet, mit ihrer Verlängerung direct in das Bolometer münden läszt. Dann miszt man die Energie nicht in dem zwischen den Brücken abgegrenzten Stück, (*a c*, wenn es sich um die Welle im Wasser handelt) sondern jenseits desselben. Die Bedingung für maximale Energieabgabe an das Bolometer ist aber nach wie vor, dasz *a c* mit *b a* in Resonanz sei, — sofern man nur dafür sorgt, dasz in dem Abschnitt zwischen *c* und dem Bolometer keine Reflexionen statt finden, die ihrerseits zur Bildung störender stehender Wellen Anlasz geben können. Die Gefahr solcher Reflexionen liegt an zwei Stellen vor: Zunächst am Bolometer selbst. Verwendet man dasselbe so, wie es, nach den Angaben in der Literatur zu schlieszen, allgemein benutzt zu werden scheint, so nimmt es, ganz unabhängig von den leitenden Verbindungen mit den Versuchsdrähten, aus den den Raum durchziehenden Schwingungen Energie auf. Wir erhielten brauchbare Versuchsreihen erst, nachdem wir das Bolometer mit einer metallischen Hülle umgeben hatten; wo aber diese Hülle, bei *e*, von den (isolirten) Zuleitungsdrähten durchsetzt wird, da treten nun kräftige Reflexionen der auffallenden Wellen auf. Die rücklaufende Welle wird in *c* abermals reflectirt. Die Energieabgabe im Bolometer wird dann im allgemeinen nicht nur durch die Länge *a c*, sondern auch durch *c e* bestimmt. Diese Reflexionen werden aber nach dem von Bjerknes benutzten Princip unschädlich gemacht, indem man zwischen *c* und das Bolometer hinreichend lange Drahtstrecken, (je nach der Wellenlänge bis zu 100 meter), einschaltet, sodasz wegen der starken Dämpfung der Schwingungen die Resonanz der Strecke *c e* nicht in Frage kommt.

Zweitens findet wegen des hohen Brechungsexponenten des Wassers kräftige Reflexion beim Austritt der Welle aus dem Wasser, bei *d*, statt. Diese kann, ebenso, wie bei der früheren Beobachtungsmethode, das gesuchte Maximum verschleiern und fälschen, falls der Strecke *c d* *nahezu* die gleiche Schwingungsdauer, wie *a c* und *a b* (oder ein Multiplum) zugehört, d. h. falls die Oscillationsdauer für die ganze im Wasser durchlaufene Strecke *a d* *nahezu* ein Multiplum der Schwingungsdauer für die gewählte Luftstrecke *a b* ist. Es findet aber bei der Reflexion an der Brücke *a* Phasenumkehrung, bei der Reflexion im Wasser an der Luft bei *d* keine Phasenumkehrung der electrischen Feldintensität statt; also folgt: *volle* Resonanz zwischen den Strecken *a b* und *a d* findet statt, wenn *a d* $^1/_2$, $^3/_2$, $^5/_2$ .... Halbwellen faszt. Halbwellenlängen *a b*, welche *annähernd* diese Verhältnisse ergeben würden, müssen daher vermieden werden. (Dies war bei einer der 1893 ausgeführten Beobachtungsreihen,

$l_0 = 188$ cm., übersehen worden; an Stelle derselben wurden die Reihen 1 und 2 der Tabelle neu eingefügt).

Wurden bei den Beobachtungen ohne Flaschen die hier angeführten Vorsichtsmaszregeln beachtet, und wurden andrerseits die Belegungen der Flaschen genügend klein gewählt, so war ein meszbarer Unterschied in den Resultaten beider Beobachtungsmethoden nicht vorhanden.

Von den vergleichenden Messungen, die sich sowohl auf die Wellen in Luft, wie auf die Wellen in Wasser bezogen, ist eine der Letzteren unter n⁰. 3 in die Tabelle aufgenommen. Die Flaschen bestanden aus Glasröhren von 0.1 cm. Dicke, welche die 0.2 cm. starken, in 7 cm. Abstand gespannten Paralleldrähte knapp umschlossen; die Belegungen aus *höchstens* $1^3/_4$ Windungen eines 0.05 cm. dicken Kupferdrahts.

ÜBERSICHT DER BEOBACHTUNGSRESULTATE.

Reihe N⁰.	Ort u. Zeit.	l_0	l_w	n	h	θ	mit oder ohne Flaschen.
1	Leiden 1895.	155.5 (3)	17.4 (0.4) 17.5 (1.2) 17.3 (1.5)	8.98	s. Pag. 2	19.2	mit
		155.2 (3)	17.7 (0.6) 17.4 (0.8) 17.4 (1.0)	8.90	18	18.7	mit
2	d⁰.	〃	17.4 (0.6) 17.4 (0.8) 17.4 (1.0)	8.95	22	18.7	mit
		〃	17.3 (0.6) 17.3 (0.8) 17.3 (1.0)	8.99	28.5	18.2	mit
3	Strassburg 1893	341.5 (4)	38.7 (0.6)	8.89	22	20.2	ohne
		〃	39.0 (0.6)	8.86	〃	22.0	mit
4	d⁰.	276.0 (4)	42.9 (0.6)	8.85	18	21.2	ohne
		〃	42.7 (0.6)	8.89	22	21.3	ohne
		〃	42.5 (0.6)	8.93	28.5	21.1	ohne
5	d⁰.	562.0 (4)	63.9 (0.6)	8.89	18	22.0	ohne
		〃	63.6 (0.6)	8.94	22	22.3	ohne
		〃	63.4 (0.6)	8.97	28.5	22.3	ohne

Die Tabelle ist in folgender Weise berechnet: Es bezeichne der Lage nach b die Brücke in Luft, a die Grenze des Wassers und die dort befindliche Brücke; c, c', c'' die Brücken im Wasser (von denen jeweils nur *eine* vorhanden ist;) dann werden direct beobachtet die Strecken ba, ac, ac', ac'', und zwar wird die richtige Lage der

Brücke jedesmal so gefunden: man vergleicht die Bolometerausschläge für drei äquidistante Lagen, und variirt diese Lagen unter möglichster Verringerung der Abstände so lange, bis die Ausschläge für die beiden äusseren Lagen unter sich gleich und noch deutlich kleiner, als der für die mittlere Lage, sind. In den Spalten l_o und l_w finden sich eingeklammert ( ) die Werthe der benutzten seitlichen Verschiebungen.

Aus den gemessenen Längen folgt

$$l_o = ba + \delta \quad l^w = ac + \delta = cc' = c' c''$$

wo δ die für die Brücke in Anrechnung zu bringende Drahtlänge ist. Diese kann für die Wasserwellen gefunden werden aus jedem der durch Klammern { } umschlossenen Beobachtungssätze der Reihen 1 und 2. Die unter l_w angeführten Zahlen in diesen Sätzen sind jedesmal der Reihe nach berechnet als

$$ac + 4.5, cc', c' c''.$$

In gleicher Weise wurde δ für eine Anzahl von Luftwellen, l_o zwischen 200 und 600 cM. bestimmt aus

$$l_o = ba + \delta = aa' = a' a'',$$

wo a, a', a'' die verschiedenen Resonanz ergebenden Brückenlagen bezeichnen. Es fand sich stets δ zu 4 bis 5 cm. Es wurde demgemäss für *alle* Wellenlängen angenommen:

$$\delta = 4.5.$$

Weiter folgt der Brechungsexponent für die Tempereratur θ des Wassers:

$$n' = {}^{l_o}/_{l_\omega}$$

Daraus haben wir den Brechungsexponenten n für 17° C. berechnet mittels des von HEERWAGEN [1]) bestimmten Temperaturcoëfficienten:

$$n = n' + 0.0201\,(\theta - 17).$$

Das Leitungsvermögen des Wassers bezogen auf Quecksilber, betrug in allen Versuchsreihen 5 bis 10. 10^{-10}; die einzelnen Werthe sind als unerheblich [2]) in der Tabelle nicht aufgeführt.

---

[1]) Wied. Ann. 49. p. 279. 1893.

[2]) s. E. COHN, l. c.

DISCUSSION.

Aus den Ergebnissen der Beobachtung ist die Antwort auf folgende beiden Fragen zu abstrahiren:

1. ist im Bereich der benutzten Schwingungszahlen der Brechungsexponent eine Constante? Und wenn dies der Fall,

2. ist diese Constante gleich der Wurzel aus der Dielectricitätsconstante, die man aus der Beobachtung *stationärer* electrischer Felder gewinnt?

Von den Beobachtungsreihen 1 bis 5 der Tabelle soll die dritte, als ein Beispiel, zeigen, dasz die beiden Messungsverfahren, mit und ohne Flaschen, zu identischen Resultaten führen. In der That beträgt die Differenz der gemessenen Wellenlängen unter Berücksichtigung des Temperaturunterschiedes nur 0.15 cm. Die Reihe zeigt ferner volle Übereinstimmung mit dem mittleren Satz der Reihe 4, dem gleiches h und nahezu gleiches l_0 zukommt, der aber zu andrer Zeit mit einer anderen primären Schwingung angestellt ist. Die Reihe 1, die sich von den übrigen durch andere Dimensionen der Wassermasse unterscheidet, (die aber denjenigen der jeweils *letzten* Sätze der Reihen 2, 4, 5 nahe kommen) soll das Ergebniss der Reihe 2, und insbesondere den Werth der Brückencorrection $\delta = 4.5$ stützen.

Zur Beantwortung der obigen Fragen bleiben dann die Reihen 2, 4, 5, deren je drei Sätze unter übrigens gleichen Verhältnissen für die Schwingungszahlen

$\nu = 97, 40, 27$ Millionen Vollschwingungen per Secunde ausgeführt sind. Die drei Sätze jeder Reihe unterscheiden sich durch die Tiefe der Wassermasse:

$$h = 18, 22, 28.5 \text{ cm}.$$

In übersichtlicher Zusammenstellung sind die Werthe von n für

		h		
		18	22	28.5
$\nu/_{10^6}$	97	8.90	8.95	8.99
	40	8.85	8.89	8.93
	27	8.89	8.94	8.95

Lassen wir, gemäsz dem Pag. 2 Gesetztem, zunächst die Möglichkeit zu, dasz die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von dem Masze von h abhängt, so haben wir zur Beantwortung der ersten Frage die Zahlen der einzelnen Spalten für sich zu betrachten.

Nehmen wir für $h = 18$, 22, 28.5 und für jedes ν den mittleren Werth an : $n = 8.87$, 8 92, 8.94, so ergeben sich alle Fehler in den beobachten l_w kleiner als 0.15 cm. Zufällige Fehler von dieser Grösze können nicht als ausgeschlossen gelten; also folgt:

1°. Im Gebiet der Schwingungszahlen zwischen 27 und 97 Millionen ist *keine Dispersion* nachzuweisen. Die gröszte Differenz zwischen den beobachteten Brechungsexponenten wird 0.06, gleich $^2/_3$ procent.

Suchen wir ferner *alle* Beobachtungen aus *einem* Werth von n abzuleiten, so findet sich als günstigster Werth

$$n = 8.91 \text{ für } 17^0 \text{ C},$$

und mit diesem berechnen sich die Fehler in den beobachteten l_w:

+ 0.0	— 0.1	— 0.2
+ 0.3	+ 0.1	— 0.1
+ 0.1	— 0.2	— 0.3

Auch diese Abweichungen *können* allenfalls noch zufällige sein. Es steigen aber in allen drei Zeilen die Werthe der n mit steigendem h, und dies legt die Vermuthung nahe, dasz der Pag. 2 erwähnte systematische Fehler sich geltend gemacht hat. Ist er vorhanden, und ist er der einzige, so musz der wahre Werth von n *oberhalb* der gemessenen liegen. Dieser Fehler haftet dann aber nicht unserer Beobachtungsmethode speciell an, sondern den geometrischen Verhältnissen nach, in noch höherem Masze *allen* anderen Methoden, bei denen Brechungsexponenten und Dielectricitätsconstanten aus den Längen electrischer Wellen bestimmt wurden. Nach der Methode der Kraftmessungen und mit einer Genauigkeit die bei der Messung von Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nicht erreichbar sein wird, fand HEERWAGEN [1]) als Wurzel aus der Dielectricitätsconstante

$$n = 8.99 \text{ für } 17^0 \text{ C}.$$

[1]) l. c.

Wir glauben, schlieszen zu dürfen:

2⁰. der Brechungsexponent des Wassers für Schwingungen, von denen weniger als 100 Millionen in der Secunde verlaufen, ist gleich der Wurzel aus der Dielectricitätsconstante, — und zwar mit dem grössten bisher erreichten Grade von Sicherheit. Gilt diese Sicherheit nicht als genügend, so wird die Methode gemäsz dem Pag. 2 Gesagten zu verbessern sein; im andern Fall wird man als den genauesten Werth des Brechungsexponenten, wie der Dielectricitätsconstante, den aus Kraftmessungen gewonnenen zu betrachten haben.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Dr. P. ZEEMAN te Leiden eene mededeeling aan, getiteld: *Meting van den brekingsindex van gloeiend platina*, verricht in het Natuurkundig Laboratorium te Leiden.

1. Voor de theorie der straling van gloeiende lichamen is het natuurlijk van belang te weten, welke stralen nog uit het inwendige van een lichaam kunnen uittreden. Wanneer bij gewone temperatuur de invalshoek maar niet een zekere (betrekkelijk hooge) grens overschrijdt, dan zullen zij door totale terugkaatsing daarin niet verhinderd worden omdat de brekingsindex betrekkelijk gering is. Neemt men aan, dat bij het hooger worden van de temperatuur de brekingsindex in sterke mate toeneemt, dan kunnen ten slotte alleen stralen, die een kleinen hoek met den normaal op 't stralend oppervlak maken, uittreden. KUNDT's [1]) waarnemingen over de afhankelijkheid der brekingsexponenten zijner metaalprisma's van de temperatuur (temperatuurinterval ongev. 90°) deden KOLAČEK [2]) bij extrapolatie tot het laatste besluiten. Tot een andere gevolgtrekking voeren de waarnemingen van SISSINGH [3]), die geen verandering der optische constanten van ijzer tusschen 15° en 120° kon waarnemen en van DRUDE [4]), die bij platina in koud en warm water en bij zilver en goud (bij verhitting tot 200°) slechts uiterst geringe veranderingen vond. Ik heb nu tot de temperatuur van roodgloeiend platina (ong. 800°) dit onderzoek uitgebreid en met den compensator van BABINET de verandering der optische constanten nagegaan.

---

[1]) KUNDT, Wied. Ann. Bd. 36. p. 824. 1889.

[2]) KOLAČEK, Wied Ann. Bd. 39. p. 236. 1890.

[3]) SISSINGH, Dissertatie p. 133. Leiden 1885.

[4]) DRUDE, Wied. Ann. Bd. 39. p. 481. 1890.

2. Uit de door KUNDT gegeven getallen zou volgen dat de brekingsexponent n van platina met 27% toeneemt als de temperatuur 100° stijgt. Hieruit vloeit voort, wanneer het hoofdazimut H onveranderd blijft (7), dat de hoofdinvalshoek I ongeveer 2.5° grooter moet worden bij genoemde temperatuurstijging. De door mij gebruikte toestel maakte het niet mogelijk bij een grooteren invalshoek dan $i = 65°$ in te stellen. Bij dien hoek beantwoordt aan 2.5° vermeerdering van I een daling van 9° in 't phaseverschil Φ der teruggekaatste bundels van in en loodrecht op 't invalsvlak gepolariseerde licht. En dit komt weder overeen met 36 deelen van den kop van den compensatorschroef (in 50 deelen verdeeld). Eene verplaatsing van deze orde voor iedere 100° stijging zou dus volgens KUNDT's waarnemingen te verwachten zijn. Bij 800° zou dan n ongeveer 3 maal grooter zijn dan bij gewone temperatuur en zouden ruim 5,5 geheele omwentelingen der schroef voor de compensatie noodig zijn.

En omgekeerd: bleef I constant, dan zou H 3°.5 kleiner moeten worden bij 100° stijging der temperatuur. Het hoofdazimut bij 65° vermeerdert dan met 2°.5.

En nu is met het gebruikte meetwerktuig, wanneer de spiegel slechts fraai genoeg is, eene phaseverandering, die met 4 kopdeelen van de schroef overeenkomt en eene verandering van het hersteld azimut van 0.3° reeds duidelijk te constateeren [1]).

3. Met behulp van het volgende, zal het duidelijk zijn, hoe de proef was ingericht.

De platina*spiegel* was het middengedeelte van een reep gewalst platina, lang ongeveer 50 mM., breed 5 mM., dik 1 mM., behandeld met verschillende soorten amarilpapier, tot Nr. 0000 toe. Een vrij goeden spiegel werd aldus verkregen en ofschoon het beeld van den collimatorspleet te wenschen overliet, was toch de streep in den compensator van BABINET bij gebruik van homogeen licht voldoende scherp. De reep werd door een electrischen stroom verwarmd. Het spiegelend deel krijgt dan de hoogste temperatuur.

4. *Opstelling spiegel.* Op een houten plankje zijn twee stijlen van koper bevestigd. In het boveneind van den eenen stijl wordt het eene eind van den platinareep (3) vastgeklemd. Aan het andere eind van dien reep is vastgeklemd een stuk, waarvan het cylindervormig verlengde deel door een opening in den anderen stijl heengaat. Door een veer die om dit verlengstuk is aangebracht, wordt het einde ervan naar buiten gebracht, en de reep gespannen gehouden

---

[1]) SISSINGH, l. c. p. 70 en vgl.

bij de hooge temperaturen. De spiegel behoudt dan zijn stand zooals door het spiegelbeeld, met den kijker waargenomen, werd geconstateerd. Het houten plankje is op een stelinrichting boven den spectrometer (5) bevestigd. Ten einde te voorkomen dat bij het stellen van den spiegel de stugheid der toeleidingsdraden van den stroom last veroorzaakt, gaan die draden naar twee kwikbakken, waarin ook de koperdraden zijn gedompeld, die aan de twee bovengenoemde stijlen zijn vastgemaakt.

5. Wat betreft de *methode van waarnemen*, de inrichting der toestellen, de verkrijging van homogeen licht etc. bij de bepaling der optische constanten, verwijs ik op vroegere publicaties [1]).

6. De *temperatuur van den spiegel* bepaalde ik, nadat de optische waarnemingen waren afgeloopen, door te zien, bij welke stroomsterkte kleine kristallen van verschillende zouten die op den spiegel werden gebracht, smolten. De smeltingstemperaturen ontleende ik aan LANDOLT's en BÖRNSTEIN's tabellen. Het bleek, dat bij 80 Ampèren, toen de reep in het midden roodgloeiend werd, maar het uitgestraalde licht nog niet hinderde aan de duidelijkheid van den band in den compensator, de temperatuur 800° was.

7. *Resultaat.* Het bleek dat bij deze temperatuur en bij gebruik van rood, geel of blauw licht geen verandering in *plaats of donkerheid* van de streep in den compensator kon worden geconstateerd. Toch gaf bij den gebruikten spiegel een draaiing van den schroefkop over 6 deelen en van den analysator over minder dan 1° reeds een duidelijke verandering en de invloed van de temperatuur blijft dus hierbeneden. Hieruit volgt dan dat ook bij verhooging der temperatuur tot 800° de brekingsexponent nog geen verandering heeft ondergaan, die vergelijkbaar is met die, welke uit KUNDT's waarnemingen met doorgelaten licht (bij een temperatuursverhooging van slechts 90°) (2) is afgeleid. De nauwkeurigheid van mijne waarnemingen is geringer dan de in (2) behandelde, maar dit kan aan deze conclusie slechts weinig veranderen. Ik geloof niet, dat het nut zou hebben nu nader na te gaan hoe groot wel de juiste grenzen der waarnemingsfouten zijn bij deze proef, resp. die, waarbinnen aangetoond is dat n onveranderd blijft. Ik stel mij voor door waarnemingen bij den hoofdinvalshoek en met een fraaieren spiegel te verrichten, binnen grenzen van nauwkeurigheid, die een paar malen nauwer zijn, het bedrag der verandering te bepalen. Het onderzoek zal verder ook tot nog hooger temperaturen kunnen worden uitgebreid, door

---

[1]) SISSINGH, Archiv. Neérland. T. XX. p. 1. 1886.
ZEEMAN, Archiv. Neérland. T. XXVII. p. 252. 1893.

met een spectroscoop achter den compensator het door het platina uitgestraalde licht te scheiden van het homogene gereflecteerde licht. Met 't oog op de in (1) genoemde theoriën veroorloof ik mij echter nu reeds de nu gevonden uitkomst over de geringe veranderlijkheid van *I* en *H* of, wat hetzelfde is, van den absorptie coefficient ϱ en *n* mee te deelen. Bij zeer hooge temperaturen moet men wel aannemen dat zoowel ϱ als *n* veranderen, 1^0. omdat een lichtuitstralend lichaam volgens de tweede hoofdwet dat licht moet absorbeeren dat het zelf uitzendt [1]), 2^0. omdat de afstand der moleculen bij genoegzame temperatuurverhooging merkbaar, en bij overgang in vloeibaren toestand zelfs vrij belangrijk kan veranderen.

Weerkunde — De Heer KAMERLINGH ONNES, doet namens Dr. W. VAN BEMMELEN in aansluiting van het vroeger aangebodene (De Isogonen in de XVI^{de} en XVII^{de} Eeuw, Akademisch proefschrift Utrecht 1893, Zitting de Akademie van 28 April 1893) verslag van diens verderen arbeid betreffende *de algemeene graphische voorstelling van de seculaire variatie der aardmagnetische declinatie* en vertoont een kaart en haar photographische afbeelding.

Deze photographie met verklarenden tekst, wordt door den Heer VAN BEMMELEN aan directeuren van magnetische observatoria rondgestuurd.

Sinds lang heeft men voor vele waarnemingsplaatsen de seculaire variatie der declinatie graphisch voorgesteld en de hierbij verkregen krommen hebben reeds tot vele onderzoekingen gediend. Hierbij traden voornamelijk twee vragen op den voorgrond; ten eerste: in hoever moeten onregelmatigheden in het gedeeltelijk verloop der krommen aan waarnemingsfouten of aan werkelijke onregelmatigheden in de variatie toegeschreven worden; ten tweede: kan een periodiciteit aan de geheele variatie toegekend worden en is de periode over de geheele aarde dezelfde.

Ter beantwoording dier vragen is een algemeene voorstelling voor een zoo groot mogelijk gedeelte der aarde noodig. Een ongunstige omstandigheid was evenwel het feit, dat voor den tijd, vroeger dan het jaar 1700, geen isogonen-kaart dan die voor 1600, aanwezig was; welke hinderpaal evenwel door de zes kaarten, voor het tijdvak 1540—1680 in mijn Akademisch proefschrift in het licht gegeven, uit den weg werd geruimd.

Een kaart, de algemeene voorstelling der seculaire variatie bevattende, werd door mij dadelijk na het uitgeven dier kaarten geteekend; na

---

1) KOLAČEK. l. c. p. 248.

dien tijd is diezelfde arbeid ook door de Heeren L. A. BAUER en A. VON TILLO verricht en is door hen daarover bericht gegeven; beiden bewerkten ook de inclinatie. Hunne kaarten zijn evenwel nog niet verschenen.

De wijze, waarop de kaart is samengesteld, is hoogst eenvoudig en moge hier met een enkel woord verklaard worden.

Voor de snijpunten der meridianen (Lengte van Greenwich, 0°, 20°, 40° etc. 340°) met de parallellen (70° N, 60°, 40°, 20°, 0°, 20° Z, 40°, 50°) werden uit de isogonen kaarten de declinaties op het oog genomen. De declinaties voor opvolgende tijdstippen voor ieder dier snijpunten (als 't ware denkbeeldige waarnemingsplaatsen) werden nu zoo in Coördinatenstelsel gebracht, dat het snijpunt de oorsprong, de parallel de tijdas en de meridiaan de declinatieas was. Verder werd de tijd van West naar Oost geteld, zóó dat de oorsprong met het jaar 1700 overeenkwam; en de declinatie van Zuid naar Noord, zóó dat de oorsprong met 0° declinatie en de Noordelijke kant met Westelijke declinatie overeenstemde.

De schaal werd zoo gekozen dat 2 mM. gelijk aan 10 jaar en ook aan 1° declinatie was en 20° in geographische lengte met 400 jaar overeenkwamen.

De door verschillende punten getrokken kromme lijnen geven alleen de hoofdtrekken van de variatie aan; zij zijn vrij uit de hand en zonder bijredeneeringen of angstvalligheden getrokken.

De isogonen-kaarten voor 1492, 1540, '80, 1610, '40, '65, '80, 1700, '10, '20, '30, '44, '58, '70, '87, '93, 1800, '30, '40, '58, '80 en '85 werden op bovengenoemde wijze uitgetrokken.

Aan mijn eigen kaarten bracht ik eenige verbeteringen en uitbreidingen aan; daarentegen verbeterde ik de kaarten van HANSTEEN voor de achttiende eeuw nog niet, hoewel daarvoor reeds vele bouwstoffen aanwezig zijn. Voor de resultaten evenwel heb ik veel daarvan benuttigd.

Een algemeene beschouwing der kaart leert nu, dat de seculaire variatie in ver uit elkaar gelegen streken der aarde op geheel verschillende wijze verloopt, dat evenwel de verschillende typen in elkander overgaan.

Ik wil die overgangen van Europa uit vervolgen, waarbij dan de zoogenaamde omkeerpunten een belangrijke rol zullen spelen.

De kromme over Spanje draagt het door de kromme van Parijs bekende type; zij herhaalt zich naar het Noord-Westen toe, en in de streken van de Baffins-baai was er geen aanleiding die krommen, hoewel door de vele ontbrekende waarden zeer twijfelachtig, anders te teekenen.

Bij het toenemen der amplitudo verheft de geheele kromme zich tot boven de nullijn.

In den Zuidelijken Atlantischen Oceaan wordt de periode langer zoodat eindelijk maximum en minimum buiten den ons toegankelijken tijd vallen.

Naar het Oosten heen verandert het type en ontwikkeld zich een secundair minimum, door een secundair maximum voorafgegaan. Verder Oostwaarts verdwijnt het Europeesche maximum en ontwikkelt zich de voorganger; zoo ook in den Indischen Oceaan, waar bovendien nog een derde maximum optreedt.

In de Polynesische streken worden de krommen, zoowel door de geringheid der seculaire variatie, als door de twijfelachtige gegevens onbepaalder van karakter.

Merkwaardig is het hoe de krommen in den Indischen Oceaan geheel boven de nullijn in Polynesie onder haar blijven.

In Amerika blijft het maximum (ongeveer 1700) zich duidelijk vertoonen; in New-York komt het in het jaar 1660 voor. De waarnemingen van COLUMBUS wijzen evenzeer op dit maximum en misschien vindt men het in het door BAUER voor Rome vermoedde maximum (± 1500) terug.

Het bovengenoemde secundaire minimum voor St. Petersburg is reeds door HANSTEEN wegens den gang der declinatie in Torneå vermoed; een nieuw bewijs vond ik in de zeer geringe declinatie van 1° 44′ W, aangeteekend op een kaart der Caspische Zee van G. VAN KEULEN, voor 1722, (Rijksarchief N°. 93 der collectie).

Het verloopen naar tijd en plaats van de omkeerpunten heb ik voor twee gevallen in graphische voorstelling gebracht door alle punten waar zulk een omkeerpunt tegelijk voorkomt door lijnen, welke ik *isoextremen der declinatie* heb genoemd, te verbinden.

Het materiaal voor deze isoextremen is tweeledig; het eene gedeelte vormen de data aan de krommen der kaart ontleend, het andere de data door krommen van bepaalde waarnemingsplaatsen verkregen.

Het laatste heeft natuurlijk hooger waarde. Toch is het eerste misschien meer vrij van toevallige onregelmatigheden.

In de eerste bijkaart is het maximum van Westelijke declinatie, dat in het begin dezer eeuw in West-Europa plaats vond van Azië tot den Atlantischen Oceaan, van 1770 tot 1893 vervolgd.

Het ombuigen van de isoextreem van 1850 van Spitsbergen naar Zuid-Groenland schijnt mij bij de heerschende groote onzekerheid in die streken nog het meest waarschijnlijke. De isoextreem van 1770 is evenzoo zeer twijfelachtig.

Het maximum van Oostelijke declinatie, dat in 1580 in Parijs voorkwam, is van midden-Europa tot aan de Westkust van Amerika van 1550—1900 vervolgd (tweede bijkaart).

De samenhang van het Europeesche en het Amerikaansche maximum is langs de 20° N parallel over den Atlantischen Oceaan waar te nemen. De lijn voor 1550 is verder zeer onzeker, die van 1900 slechts op een kleine extrapolatie gegrond.

Voor de andere omkeerpunten zijn nog te weinig data om dergelijke isoextremen op te kunnen maken.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Dr. H. J. OOSTING te Nieuwediep eene mededeeling aan, getiteld: *Stroboskopisch onderzoek en intermitteerende photographie bij gedwongen trillingen van gespannen caoutchoucdraden*".

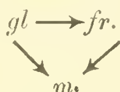
(Deze mededeeling wordt later opgenomen).

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt, uit naam van de Heeren C. A. LOBRY DE BRUYN en W. ALBERDA VAN EKENSTEIN, voor het Zittingsverslag een opstel aan, luidende: „*Reciproke omzetting van glucose, fructose en mannose in elkaar*".

De studie van de verhouding van sommige alkalizouten van zwakke zuren op glucose, fructose en op hun mengsel de invertsuiker [met het doel na te gaan of daardoor misschien rietsuiker synthetisch uit zijne beide splitsingsproducten zou zijn terug te vormen] en van de inwerking van waterige ammoniak op glucose, voerde de eerste van ons tot de waarneming dat verdunde alkaliën, zelfs in zeer geringe hoeveelheden, op het draaiend vermogen der twee genoemde suikers en op dat van andere koolhydraten een belangrijken invloed uitoefenen. Deze verandering der draaiing was een bewijs van een of andere omzetting. Glucose en fructose, elk afzonderlijk, geven bijv. nagenoeg inactieve stropen, terwijl hun $[\alpha]_D$ gelijk is aan $+ 53°$ resp. $-91°$. De nadere studie van dit verschijnsel heeft ons tot het resultaat gevoerd dat glucose, fructose en mannose wederkeerig in elkaar worden omgezet en wel zoodanig, dat uit een deel van elk hunner de twee andere suikers worden gevormd. De mannose werd als hydrazon afgescheiden en als gekristalliseerd methylmannoside geidentificeerd, de glucose eveneens als methylglucoside en ook nog als suikerzuur. De fructose werd uit het mengsel met glucose, na

verwijdering der mannose als hydrazon, *door uittrekken met verschillende oplosmiddelen* geconcentreerd en toen als calcium fructosaat van de nog aanwezige glucose gescheiden.

Men heeft hier dus te doen met een evenwichtsreactie tusschen de drie suikers, welke kan voorgesteld worden door het schema



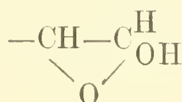
en die ontstaat onder den invloed van hydroxylionen.

Een eigenlijk evenwicht treedt echter nimmer op daar van den aanvang af eene steeds toenemende hoeveelheid zuur wordt gevormd.

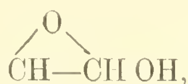
De reciproke omzetting der drie suikers kan als eene intramoleculaire atoomverschuiving, welke zich bij vele analogen aansluit, worden opgevat. Daar de configuratie der koolstofatomen 3—6 bij alle drie dezelfde is, kan men, alleen acht gevende op de atomen 1 en 2, deze atoomverschuiving als volgt voorstellen:



gaat door opname en afsplitsing van water over in



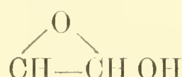
[misschien een der modificaties van glucose door TANRET ontdekt], hieruit vormt zich door de bedoelde atoomverschuiving —CO—CH_2 OH dat is fructose; deze gaat door eene gelijksoortige verschuiving over in het inwendige anhydride



dat door C 2 stereoisomeer is met het uit glucose gevormde en waarvan daarenboven, doordat C 1 ook asymetrisch is geworden, twee stereoisomeren mogelijk zijn. Dit laatste anhydride nu geeft door opname en afsplitsing van water de mannose, die zooals bekend, alleen in het teeken van C 2 van de glucose verschilt. De fructose is dus bij elk der reactie's een noodzakelijk tusschenproduct. Dat zulks werkelijk zoo is wordt bewezen door het feit dat mannose, hetwelk slechts een klein rechts draaiend vermogen bezit, [$(\alpha)_D = + 12°$),

met verdunde alkaliën, door nul heen vrij sterk linksdraaiend wordt, om daarna, als de hoeveelheid glucose vermeerdert, weer naar nul terug te keeren.

Men ziet gemakkelijk in dat de tusschenstadia



door intramoleculaire atoomverschuiving in plaats van fructose —CO—CH_2 OH, ook een zuur —CH_2—CO OH kunnen geven, dat waarschijnlijk een tusschenproduct is bij de vorming van saccharinezuur.

Andere suikers geven, zooals het reeds voortgezet onderzoek waarschijnlijk maakt, analoge omzettingen. Blijkt de reactie algemeen dan moet zij tot een aantal onbekende ketosen en enkele onbekende pentosen of hexosen voeren. Het is echter te voorzien dat de scheiding der isomeren groote moeilijkheden zal opleveren. [De vraag doet zich voor of andere α oxyaldehyden een analoge omzetting kunnen ondergaan].

Door de bovengenoemde reciproke omzettingen is de vorming van manniet bij reductie van glucose door natrium amalgaam verklaard. Zij wijzen tevens op de noodzakelijkheid zure of neutrale reductiemiddelen te gebruiken bij de studie der suikers. Ook is het duidelijk dat zij in de plantenphysiologie een rol kunnen spelen. De vorming van rietsuiker uit glucose alleen wordt mogelijk en gemakkelijk verklaarbaar; de uit glucose gevormde stroop bevat deze suiker en de fructose in ongeveer gelijke hoeveelheden. Mocht de reeds zoo dikwijls te vergeefs beproefde synthese van saccharose uit glucose en fructose gelukken, dan wordt het mogelijk uit cellulose en amylum rietsuiker te bereiden.

De nadere bijzonderheden van ons onderzoek worden spoedig in het Recueil gepubliceerd.

Carthographie. — De Heer VAN DIESEN vestigt de aandacht op eene kaart van Noordholland, die bij de Akademie berust en die hij ter inzage heeft gehad bij een onderzoek, dat door hem is ingesteld omtrent den achteruitgang der kust van Noord- en Zuidholland in vroegere eeuwen. Hij acht haar van hooge waarde.

De verhandeling over de vergrooting van het Haarlemmermeer door den Heer RAMAER had hem de aanwezigheid dier kaart in onze boekerij doen ontdekken.

Zij is in het begin van onzen strijd tegen Spanje op last van den

Hertog van Alva vervaardigd door JOOST JANSZ BEELDSNIJDER en in 1575 met octrooi uitgegeven. De eerste uitgaaf schijnt geheel verdwenen. De kaart, die ter tafel komt, is de tweede uitgaaf, in 1610, door HARMAN ALLERTSZOON VAN WARMENHUIJSEN bezorgd, en opgedragen aan de Staten van Noordholland en Westvriesland. Zij schijnt een nauwkeurige copy, misschien wel met gebruik van de oude koperplaten vervaardigd, en toont aan hoe de oorspronkelijke maker er voor gezorgd heeft, de Spanjaarden in te lichten omtrent de wateren, die zij bij hun tochten door Noordholland zouden aantreffen. Alle kreken en slooten zijn namelijk in ruime breedte afgebeeld.

Ook de schaal is ten dienste van de Spaansche overheid ingericht, zijnde een mijl, die bij berekening niet anders dan als een Spaansche mijl is aan te nemen.

Latere druk der kaart, zooals die van 1778 van LE FRANCQ VAN BERKHEY, en die door Mr. G. DE VRIES Az. opgenomen in zijn kaart van Holland's Noorderkwartier in 1288, door de Akademie uitgegeven in 1864, vertoonen de bijzonderheid, dat achtereenvolgens de mijl kleiner wordt.

De mijl heeft namelijk op de drie genoemde kaarten de lengten van 73, 69 en 67 mM.; vermoedelijk een gevolg van het krimpen van het papier der oude kaart, waarvan de nieuwe werd overgenomen.

De kaart, met hoeveel zorg ook in bijzonderheden van het terrein bewerkt, bleek, bij gebruik voor het beoogde doel, niet de gewenschte nauwkeurigheid te bezitten; wat de triangulatie betreft. De driehoek Amsterdam—Haarlem—Alkmaar, vergeleken met die van KRAYENHOFF, vertoonde een belangrijke afwijking van den top oostwaarts, wanneer men de basis Amsterdam—Haarlem van beide driehoeken deed samenvallen; zelfs rekening houdende met de omstandigheid dat BEELDSNIJDER den Oudekerkstoren en KRAYENHOFF den toren van de Westerkerk, eerst in 1638 voltooid, als hoekpunt bezigde.

Scheikunde. — De Heer MULDER biedt voor de Verhandelingen aan een manuscript van hemzelven en den Heer J. HERINGA, getiteld: „*Over een peroxy-salpeterzuur zilver*".

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt voor de Verhandelingen aan een manuscript van den Heer J. C. KLUYVER te Leiden, getiteld: „*Over een minimaaloppervlak van tweevoudigen samenhang*". Als rapporteurs over dien arbeid worden door den Voorzitter aangewezen de Heeren W. KAPTEYN en SCHOUTE.

Voor de Bibliotheek worden aangeboden:

1⁰. door den Heer STOKVIS diens 2e gedeelte, 2e deel, van zijne Geneesmiddelleer;

2⁰. door den Heer KAMERLINGH ONNES, uit naam van den Heer A. LEBRET, diens dissertatie: „Metingen over het verschijnsel van HALL in bismuth; en uit naam van den Heer V. BECKER, diens: „De jongste geologische onderzoekingen in het diluvium van Noord-Brabant en Limburg".

3⁰. door den Heer HOEK: 1⁰. Guide zoologique. Communications diverses sur les Pays-Bas; 2⁰. Bulletin du 3e Congrès international de Zoologie à Leide.

— De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN.

GEWONE VERGADERING

DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 26 October 1895.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer C. A. J. A. OUDEMANS.

Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van den Heer HOOGEWERFF, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Een gedrukt exemplaar van de onlangs door de Académie Royale de Médecine de Belgique uitgeschrevene prijsvragen.

3°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken (3 October 1895), ter begeleiding van een brief van den Minister van Buitenlandsche Zaken, waaruit blijkt, dat de gezant van Groot-Brittannië Harer Majesteits Regeering heeft uitgenoodigd, zich te doen vertegenwoordigen op eene in Juli 1896 op initiatief der Royal Society te London beraamde internationale conferentie, tot bespreking van de mogelijkheid en de wenschelijkheid om, door samenwerking

van geleerden van alle landen, de bewerking van een catalogus of index van wetenschappelijke geschriften voor te bereiden. De Minister van Binnenlandsche Zaken noodigt de Afdeeling uit, hem, betreffende de in bedoelden brief uiteengezette aangelegenheid, te dienen van bericht en raad.

De Voorzitter meent dat het onderwerp te belangrijk is om daarover zonder voorlichting te beraadslagen, en stelt voor, de des betreffende stukken in handen te stellen van de Commissie, op 31 Maart 1894 benoemd om hare denkbeelden over de wenschelijkheid van de samenstelling van den hierboven bedoelden catalogus uiteen te zetten. Het voorstel wordt zonder discussie aangenomen en daarbij de wenschelijkheid uitgedrukt dat het verslag der Commissie in de November-vergadering der Afdeeling gereed moge zijn.

De Voorzitter wijdt eenige hartelijke woorden aan de nagedachtenis van het onlangs overleden buitenlandsche Lid der Akademie Louis Pasteur, en geeft een overzicht van hetgeen de beroemde geleerde op wetenschappelijk gebied, in verschillende richtingen en tot heil der menschheid, heeft tot stand gebracht. Deze hulde, den onsterfelijken genialen natuuronderzoeker bewezen, wordt met ingenomenheid aangehoord en met bijval begroet.

Wiskunde. — De Heeren W. Kapteyn en P. H. Schoute brengen het volgende verslag uit over de verhandeling van den Heer J. C. Kluyver: *„Over een minimaal-oppervlak van tweevoudigen samenhang".*

Noemt men somtijds oppervlakken van den kleinsten inhoud bij gegeven grenzen minimaal-oppervlakken, ook geeft men dezen naam aan oppervlakken die de eigenschap bezitten dat de som hunner hoofd-kromtestralen in ieder punt nul is. Deze bepalingen zijn echter niet gelijkwaardig. Wel heeft, zooals Meusnier heeft aangetoond, ieder oppervlak van den kleinsten inhoud de voornoemde eigenschap, maar omgekeerd bezit niet altijd een oppervlak dat deze eigenschap bezit en door de gegeven grenzen gebracht is, het karakter van een analytisch minimum.

De schrijver behandelt de vraag, het oppervlak van den kleinsten inhoud te vinden dat tusschen de omtrekken van grond- en bovenvlak van een rechthoekig parallelopipedum kan worden uitgespannen.

Daartoe bepaalt hij eerst alle oppervlakken die de eigenschap der kromtestralen bezitten en aan de grensvoorwaarden voldoen en komt tot het resultaat dat bij gegeven lengte en breedte van de beide

rechthoeken de onderlinge afstand zekeren grens niet mag te boven gaan. Is deze afstand kleiner, dan toont hij aan dat er steeds twee en niet meer dan twee oppervlakkken bestaan die de verlangde eigenschap bezitten, welke oppervlakken zich vereenigen in geval de afstand juist met de gegeven grenswaarde overeemstemt. Daarna wordt de vraag onderzocht, welke der beide gevonden oppervlakken aan de voorwaarden van een analytisch minimum voldoet; dit moeielijk punt wordt beslist door middel van eene meetkundige redeneering door Moigno en Lindelöf toegepast om de beide catenoïden van het overeenkomstig cirkelvraagstuk te onderscheiden. Nadat op deze wijze de eigenlijke vraag is opgelost, houdt de schrijver zich verder bezig met een bijzonder geval en met ontaardingen van het gevonden oppervlak.

Het bijzonder geval ontstaat wanneer men de rechthoekszijden gelijkstelt; men vindt dan eene bevestiging van de resultaten die vroeger door Schwarz voor dit geval werden verkregen. Onder ontaardingen verstaat de schrijver de oppervlakken die ontstaan wanneer de lengte-afmeting der rechthoeken meer en meer toeneemt. Hierdoor kan men uit het oorspronkelijk gevonden oppervlak twee nieuwe afleiden naar gelang men aanneemt dat van de rechthoeken een of twee tegenoverstaande zijden zich naar het oneindige verwijderen. Neemt men in het eerste geval bovendien aan dat de breedte oneindig toeneemt dan blijven van de rechthoeken slechts twee aangrenzende zijden over. In deze onderstelling gaat het oppervlak over in een oppervlak waarvan de vergelijking het eerst door Scherk werd bepaald. Neemt men in het tweede geval bovendien aan dat de hoogte meer en meer aan de breedte gelijk wordt, dan verkrijgt men een tweede oppervlak dat ook door Scherk werd gevonden. Ten slotte bespreekt de schrijver een oppervlak dat uit het oorspronkelijk gevonden oppervlak kan worden afgeleid zooals Bonnet heeft aangetoond en dat daarom den naam draagt van het toegevoegde oppervlak van Bonnet.

Hebben we hiermede een overzicht gegeven van de resultaten door den schrijver verkregen, de bewerking getuigt van groote bedrevenheid in de theorie der Elliptische functiën en der conforme afbeelding, die hierbij een groote rol spelen. Bij de afleiding toch van de coördinaten van het oppervlak in functie van twee onafhankelijke parameters volgt de schrijver de methode der conforme afbeelding welke door Riemann, Weierstrass en Schwarz is ontwikkeld en vindt hij deze in den vorm van elliptische integralen van de eerste soort die door invoering van behoorlijk gekozen substituties in den normaalvorm van Weierstrass worden gebracht. De reëele periodes

dezer integralen staan in een eenvoudig verband met de afmetingen van het parallelopipedum en de imaginaire perioden met de lengten van drie kromtelijnen op het oppervlak die gemakkelijk zijn aan te wijzen.

Wij onthouden ons van de bespreking van meerdere bijzonderheden, maar mogen niet nalaten er op te wijzen dat de uiteenzetting in alle opzichten uitstekend is en de lezing zeer vergemakkelijkt wordt door bijgevoegde teekeningen en numerische resultaten.

Het geheel achten wij eene belangrijke bijdrage voor de theorie der Minimaal-oppervlakken; wij stellen U daarom gaarne voor deze Verhandeling in de werken van de Akademie op te nemen.

Utrecht. W. KAPTEYN
Groningen. P. H. SCHOUTE.

De conclusie van het rapport wordt goedgekeurd.

Aardkunde. — De Heer MARTIN doet eene mededeeling „*over tertiaire fossielen van de Philippijnen*".

De zoöloog C. SEMPER verzamelde gedurende zijn verblijf in de Philippijnen benevens dieren der hedendaagsche fauna ook een groot aantal gesteenten en fossielen, waarvan tot nu toe slechts de eerstgenoemden bewerkt werden, terwijl de versteeningen gedurende het leven van SEMPER niet nader onderzocht zijn. De reden is vermoedelijk wel daarin gelegen, dat tertiairfossielen van het karakter der philippijnsche vroeger weinig bekend waren en de determinatie der voorwerpen dientengevolge groote moeilijkheden opleverde. Na den dood van SEMPER kwamen de bedoelde fossielen in het bezit van het Geologisch Museum te Leiden, en het bleek aldaar spoedig, dat zich in de verzameling van de Philippijnen een groot aantal soorten bevond, die reeds uit Nederlandsch Oost-Indië waren beschreven. De volgende species konden door mij gedetermineerd worden:

Terebra Jenkinsi K. Mart. . . .	M.
Terebra bandongensis K. Mart. .	M.
Conus sinensis Sow.	P., L.
Conus insculptus Kien.	M., L.
Conus palabuanensis K. Mart. . .	J.
Conus Loroisii Kien.	M., P., L.

Pleurotoma gendinganensis K. Mart.	P.
Pleurotoma carinata Gray. . . .	P., L.
Pleurotoma coronifera K. Mart. .	E. (?), M.
Pleurotoma neglecta K. Mart. . .	M.
Turricula bataviana K. Mart. . .	P.
Fusus Verbeeki K. Mart. . . .	M., P.
Latirus madiunensis K. Mart. . .	P.
Pyrula gigas K. Mart.	M.
Tritonidea ventriosa K. Mart. . .	M.
Nassa Verbeeki K. Mart. . . .	P.
Murex Verbeeki K. Mart. . . .	P.
Murex djarianensis K. Mart. . .	M.
Murex brevispina Lam.	M. (?), P., L.
Murex pinnatus Wood.	M., L.
Murex microphyllus Lam. . . .	M., L.
Murex capucinus Lam.	—, L.
Murex Grooti Jenk.	M.
Ranella spinosa Lam.	M., L.
Ranella elegans Beck.	M., L.
Ranella raninoides K. Mart. . .	M.
Ranella gyrina Linn.	—, L.
Cypraea Smithi K. Mart. . . .	M.
Strombus isabella Lam.	Q., L.
Rostellaria javana K. Mart. . .	M.
Vicarya callosa Jenk.	M.
Potamides Jenkinsi K. Mart. . .	P.
Turritella terebra Lam.	Q., L.
Natica mamilla Lam.	M., L.
Arca granosa Linn.	P., L.
Cardita decipiens K. Mart. . . .	P.
Venus squamosa Lam.	P., L.
Clementia papyracea Gray. . . .	M., P., L.
Corbula scaphoides Hinds. . . .	M., P., L.
Callianassa Dijki K. Mart. . . .	M., Q.

De bijgevoegde letters geven ten eerste aan, of de genoemde fossielen al dan niet nog in de hedendaagsche fauna voorkomen,

en verder in welke lagen der eilanden van den Indischen Archipel dezelfde soorten gevonden zijn: E = Eoceen; M = Mioceen; P = Plioceen; J = Jongtertiair in het algemeen; Q = Quartair; L = nog levende species.

Hetgeen vroeger van Philippijnsche tertiairfossielen bekend was, beperkte zich in hoofdzaak tot *nummulieten* uit de nabijheid van Manila en *foraminifeeren* uit de Sierra Zambales in het noordwestelijke Luzón, zoodat de bovenstaande lijst reeds om die reden van belang is. Zij wordt het nog meer door de vindplaatsen der voorwerpen, want deze zijn gedeeltelijk in streken gelegen, die nooit grondig onderzocht werden. In de eerste plaats moeten hier versteeningen uit den bovenloop van de Rio Grande de Cagayan genoemd worden. Daar zijn aan de beken Catalangan en Ilarön specimina verzameld, die bewijzen, dat op Luzón jongmioceene lagen voor den dag komen, die als aequivalent met het typische jongmioceen van Java moeten beschouwd worden. Dergelijke lagen zijn in de SEMPER'sche collectie ook aangetoond voor het eiland Cebú, ten noorden van Mindanáo, alwaar bij de kolenmijnen van Alpacó een leitfossiel van het javaansche jongere mioceen, *Vicarya callosa Jenk.*, gevonden werd.

Tertiaire fossielen zijn buitendien door SEMPER medegebracht van de heuvelen van Aringay, aan de noordwestkust van Luzón. Zij toonen aan, dat deze heuvelen tot het jongere tertiair behooren, al was het dan nog niet mogelijk uit te maken, of zij tot het mioceen of wel tot het plioceen moeten gerekend worden. Daarentegen bleek, dat plioceene lagen aan de Rio Agusan op Mindanáo voor den dag komen.

Wanneer men alles samenvat, wat tot nu toe over tertiaire en jongere sedimenten van de Philippijnen bekend is geworden, dan verkrijgt men het volgende overzicht:

EOCEEN op *Luzón*, *Cebú* en misschien ook op *Mindanáo*.

JONG-MIOCEEN op *Luzón* en *Cebú*.

PLIOCEEN op *Mindanáo*; waarschijnlijk ook op *Luzón* en *Sámar*.

QUARTAIR op *Luzón*, *Sámar*, *Cebú* etc.

De lagen correspondeeren dus met de jongere sedimenten van Java, alwaar eveneens de genoemde afdeelingen van het tertiair benevens het quartair voorkomen, terwijl daarenboven eene zeer duidelijke overeenstemming in het karakter der tertiairfauna van beide streken bestaat, zooals boven uit de lijst blijkt. Reeds in den

tijd van het jongere mioceen behoorden de streken der Philippijnen met die van den Indischen Archipel tot eenzelfde marine dierprovincie.

Wiskunde — De Heer JAN DE VRIES biedt eene mededeeling aan: *„Ueber eine gewisse Klasse ganzer Functionen"*.

1. Mit Y_n soll die ganze Function von y bezeichnet werden, welche für

$$y = 2 \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \quad \ldots \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

verschwindet.

Bildet man für Y_n, durch den Algorithmus des grössten gemeinschaftlichen Theilers, eine Sturm'sche Kette, so sind, wie sogleich gezeigt werden soll, die betreffenden Functionen identisch mit

$$Y'_n,\ Y'_{n-1},\ Y'_{n-2} \ldots \ldots \ldots Y'_2,\ Y'_1.$$

Bekanntlich erhält man die Gleichung $Y_n = 0$ durch Elimination von x aus $x + \frac{1}{x} = y$ und

$$x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots \ldots + x + 1 = 0$$

wonach

$$Y_n = \frac{x^{2n+1} - 1}{x^n (x-1)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Durch Differentiation nach x erhält man hieraus

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) Y'_n = \frac{n\,x^{2n+2} - (n+1)\,x^{2n+1} + (n+1)\,x - n}{x^{n+1}(x-1)^2} \quad . \quad (2)$$

Setzt man, zur Abkürzung,

$$x^m - \frac{1}{x^m} = \xi_m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

so ergibt sich

$$y\,\xi_m = \xi_{m+1} + \xi_{m-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

und

$$Y'_n = [n\,\xi_{n+1} - (n+1)\,\xi_n] \frac{x^2}{(x^2-1)(x-1)^2} \quad \ldots \quad (5)$$

Für Y_n erhält man analog

$$Y_n = \frac{x(\xi_{n+1} + \xi_n)}{x^2 - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Eine einfache Zwischenrechnung führt auf die Beziehung

$$n^2 Y_n - (ny+1) Y'_n = [n(2n+1)\xi_{n-1} - (n-1)(2n+1)\xi_n] \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2-1)}$$

oder, mit Rücksicht auf den aus (5) hervorgehenden Ausdruck für Y'_{n-1},

$$n^2 Y_n - (ny + 1) Y'_n + (2n + 1) Y'_{n-1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Aus (6) und (4) erhellt ferner, dass

$$y Y_{n-1} = \frac{x}{x^2 - 1} (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} + \xi_n + \xi_{n-2})$$

oder

$$Y_n - y Y_{n-1} + Y_{n-2} = 0. \text{ [1]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Hieraus erhält man durch Differentiation

$$Y'_n - Y_{n-1} - y Y'_{n-1} + Y'_{n-2} = 0.$$

Entfernt man hier das zweite Glied mit Hülfe der aus (7) fliessenden Beziehung

$$(n - 1)^2 Y_{n-1} - ((n-1)y + 1) Y'_{n-1} + (2n - 1) Y'_{n-2} = 0,$$

so bekommt man die Gleichung

$$(n-1)^2 Y'_n - ((n-1)ny + 1) Y'_{n-1} + n^2 Y'_{n-2} = 0. \quad . \quad (9)$$

Aus (7) und (9) erhält man aber den Satz:

Die Functionen Y'_k, *wo* $k = n, n-1, \ldots 2, 1$, *bilden eine Sturm'sche Kette für* Y_n.

2. Bekanntlich gilt die Beziehung (8) auch für die Function

$$V_n(y) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

---

[1]) Aus (8) ergibt sich die bekannte Eigenschaft, dass die Reihe Y_k ($k = n, n-1, \ldots . 2, 1, 0$) eine Sturm'sche Kette bildet.

Es soll nun die allgemeinste ganze Function $W_n(y)$ ermittelt werden, welche der Gleichung

$$W_n - y\, W_{n-1} + W_{n-2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

genügt.

Es sei

$$W_n = \overset{(0)}{B_n}\, y^n + \overset{(1)}{B_n}\, y^{n-1} + \overset{(2)}{B_n}\, y^{n-2} + \ldots . + \overset{(k)}{B_n}\, y^{n-k} + \ldots . + \overset{(n)}{B_n} \,. \quad (11)$$

Substituirt man diesen Ausdruck und die analogen Ausdrücke für W^{n-1} und W_{n-2} in (10), so verschwinden die Coëfficienten der Potenzen von y, wenn

$$\overset{(k)}{B_n} - \overset{(k)}{B_{n-1}} + \overset{(k-2)}{B_{n-2}} = 0 \text{ (wo } k = 2 \text{ bis } n - 1). \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\overset{(0)}{B_n} = \overset{(0)}{B_{n-1}}$$

$$\overset{(1)}{B_n} = \overset{(1)}{B_{n-1}}$$

$$\overset{(n)}{B_n} + \overset{(n-2)}{B_{(n-2)}} = 0.$$

Ausserdem liefert $W_2 - y\, W_1 + W_0 = 0$ noch die Bedingung

$$\overset{(2)}{B_2} + W_0 = 0.$$

Es sollen die von n unabhängigen Grössen $\overset{(0)}{B_k}$, $\overset{(1)}{B_k}$, W_0 der Reihe nach durch a, b, c angedeutet werden.

Zunächst is nun

$$\left.\begin{array}{l} \overset{(2)}{B_n} \quad - \overset{(2)}{B_{n-1}} + a = 0 \\ \overset{(2)}{B_{n-1}} - \overset{(2)}{B_{n-2}} + a = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \overset{(2)}{B_3} \quad - \overset{(2)}{B_2} \quad + a = 0 \\ \overset{(2)}{B_2} \qquad\qquad\quad + c = 0 \end{array}\right\}$$

wonach

$$B_n^{(2)} = -(n-2)\,a - c.$$

Analog bekommt man

$$B_n^{(3)} = -(n-2)\,b$$

$$B_n^{(4)} = \binom{n-3}{2} a + (n-3)\,c$$

$$B_n^{(5)} = \binom{n-3}{2} b$$

Durch den Schluss von m auf $m+1$ erhärtet man leicht, mit Rücksicht auf (12), dass allgemein

$$B_n^{(2q)} = (-1)^q \left[\binom{n-q-1}{q} a + \binom{n-q-1}{q-1} c\right]$$

$$B_n^{(2q+1)} = (-1)^q \binom{n-q-1}{q} b$$

Die allgemeine Lösung der (10) ist somit

$$W_n = a\,y^n + b\,y^{n-1} - [(n-2)\,a + c]\,y^{n-2} - (n-2)\,b\,y^{n-3} +$$

$$+ \left[\binom{n-3}{2} a + (n-3)\,c\right] y^{n-4} + \binom{n-3}{2} b\,y^{n-5} \,.\;.\;.\;. +$$

$$+ (-1)^q \left[\binom{n-q-1}{q} a + \binom{n-q-1}{q-1} c\right] y^{n-2q} +$$

$$+ (-1)^q \binom{n-q-1}{q} b y^{n-2q-1} . \;\;.\;\;.\;\;. \qquad (13)$$

Sie lässt sich offenbar zusammensetzen aus drei einfacheren Functionen P_n, Q_{n-1}, R_{n-2}, indem

$$W_n = a P_n + b\,Q_{n-1} - c\,R_{n-2}$$

$$P_n = y^n - (n-2)\,y^{n-2} + \binom{n-3}{2} y^{n-4} \ldots +$$

$$+ (-1)^q \binom{n-q-1}{q} y^{n-2q} \quad \ldots \quad (14)$$

$$Q_{n-1} = y^{n-1} - (n-2)\,y^{n-3} + \binom{n-3}{2} y^{n-5} \ldots +$$

$$+ (-1)^q \binom{n-q-1}{q} y^{n-2q-1} \quad \ldots \quad (15)$$

$$R_{n-2} = y^{n-2} - (n-3)\,y^{n-4} + \binom{n-4}{2} y^{n-6} \ldots +$$

$$+ (-1)^{q-1} \binom{n-q-1}{q-1} y^{n-2q} \quad \ldots \quad (16)$$

Beachtet man nun, dass

$$P_n = y\,Q_{n-1} \qquad \text{und} \qquad R_{n-2} = Q_{n-2},$$

so ist

$$W_n = (a\,y + b)\,Q_{n-1} - c\,Q_{n-2} \quad \ldots \ldots , \quad (17)$$

Weil, zufolge (10), $Q_{n-2} = y\,Q_{n-1} - Q_n$, ergibt sich noch

$$W_n = \alpha\,Q_n + (\beta\,y + \gamma)\,Q_{n-1} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

3. Aus $Y_2 = y^2 + y - 1$ ersieht man, dass für die Function Y_n die Constanten a, b, c der Einheit gleich sind. Daher ist

$$Y_n = Q_{n-1} + y\,Q_{n-1} - Q_{n-2} = Q_n + Q_{n-1}$$

oder

$$Y_n = y^n + y^{n-1} - (n-1)\,y^{n-2} - (n-2)\,y^{n-3} + \binom{n-2}{2} y^{n-4} +$$

$$+ \binom{n-3}{2} y^{n-5} \ldots + (-1)^q \binom{n-q}{q} y^{n-2q} +$$

$$+ (-1)^q \binom{n-q-1}{q} y^{n-2q-1} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Durch Benutzung der Gleichung $V_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$ erhält man für V_n die Werthe $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, wonach

$$V_n = y^n - n\,y^{n-2} + \frac{n\,(n-3)}{1\,.\,2}\,y^{n-4} - \frac{n\,(n-4)\,(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\,y^{n-6}\,.\;.\;.\;.\, +$$

$$+ (-1)^q \frac{n\,(n-q-1)\,(n-q-2)\,.\,.\,.\,.\,(n-2q+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,q}\,y^{n-2q}\,. \quad (20)$$

Bildet man den Ausdruck $A\,V'_n + B\,y\,V'_{n-1} + C\,V'_{n-2}$ so erhellt leicht, dass er verschwindet, falls

$$A = (n-1)\,(n-2),\; B = -\,n\,(n-2),\; C = n\,(n-1)$$

Demnach gilt die Gleichung

$$(n-1)\,(n-2)\,V'_n - n\,(n-2)\,y\,V'_{n-1} + n\,(n-1)\,V'_{n-2} = 0\,. \quad . \quad (21)$$

Ferner gelangt man mit Hülfe der aus (10) hervorgehenden Gleichung

$$V'_n - y\,V'_{n-1} - V_{n-1} + V'_{n-2} = 0$$

zur Beziehung

$$(n-1)\,(n-2)\,V_{n-1} - (n-2)\,y\,V'_{n-1} + 2\,(n-1)\,V'_{n-2} = 0$$

oder auch

$$n\,(n-1)\,V_n - (n-1)\,y\,V'_n + 2\,n\,V'_{n-1} = 0\,. \quad . \quad . \quad (22)$$

Aus (22) und (21) fliesst aber der Satz:
Die Functionen V_n, V'_n, V'_{n-1}, . . . V'_2, V'_1 bilden eine Sturm'sche Kette.

4. Die oben erwähnten Beziehungen

$$Y_n = (y+1)\,Q_{n-1} - Q_{n-2}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$V_n = \quad y \quad Q_{n-1} - 2\,Q_{n-2}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

ergeben ferner

$$(y+2)\,Q_{n-1} = 2\,Y_n - V_n$$

oder

$$\left(x+2+\frac{1}{x}\right)Q_{n-1}=\frac{2\,(x^{2n+1}-1)}{x^n\,(x-1)}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$$

woraus

$$Q_{n-1}=\frac{x^{2n}-1}{x^{n-1}\,(x^2-1)}$$

Daher

$$Q_n=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\ldots$$

oder

$$Q_n=V_n+V_{n-2}+V_{n-4}+\ldots+V_{n-2k}\quad\ldots\quad(25)$$

Auch für die Function Q_n lassen sich zwei Beziehungen aufstellen, welche (7) und (9) analog sind.

Mit Hülfe der Definitionsgleichung

$$Q_n=y^n-(n-1)\,y^{n-2}+\binom{n-2}{2}y^{n-4}\ldots+(-1)^q\binom{n-q}{q}y^{n-2q}\ldots.(26)$$

gelangt man nämlich leicht zu den Gleichungen

$$n\,Q_n-y\,Q'_n+2\,Q'_{n-1}=0\;\ldots\ldots\ldots\;(27)$$

$$(n-1)\,Q'_n-n\,y\,Q'_{n-1}+(n+1)\,Q'_{n-2}=0\;\ldots\;(28)$$

aus welchen hervorgeht, dass auch

$$Q_n,\quad Q'_n,\quad Q'_{n-1},\quad Q'_{n-2},\;\ldots\;Q'_1$$

eine Sturm'sche Kette bilden.

5. Weil $V_n=x^n+\frac{1}{x^n}=\frac{x^{2n}+1}{x^n}$, wird diese Function verschwinden für

$$y=2\,\cos\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2\,n}\;\ldots\;(k=0,\;1.\;\ldots\;(n-1))$$

Analog hat $Q_n=0$, wegen $Q_n=\frac{x^{2n+2}-1}{x^n\,(x^2-1)}$, die Wurzeln

$$y = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad . \; . \; . \; (k = 1, \; 2, \; . \; . \; . \; n)$$

Betrachten wir nun schliesslich die Gleichung

$$x^{2n+1} + 1 = 0.$$

Offenbar ist

$$\frac{x^{2n+1} + 1}{x^n (x + 1)} = V_n - V_{n-1} + V_{n-2} - V_{n-3} \quad . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Wird die rechts stehende Function von y durch U_n bezeichnet, so ist, wegen (25),

$$U_n = Q_n - Q_{n-1} = y^n - y^{n-1} - (n-1)\, y^{n-2} + (n-2)\, y^{n-3} \; . \; . \; .$$

$$. \; . \; . + (-1)^q \binom{n-q}{q} y^{n-2q} - (-1)^q \binom{n-q-1}{q} y^{n-2q-1} \quad . \quad (30)$$

Die Wurzeln von $U_n = 0$ sind offenbar $2 \cos \frac{2k+1}{2n+1}\pi$, wo $k = 0, 1, 2..(n-1)$.

Mit Hülfe von (30) ergibt sich leicht die Richtigkeit der zu (7) analogen Gleichung

$$n^2\, U_n - (n\, y - 1)\; U'_n + (2\, n + 1)\; U'_{n-1} = 0 \; . \quad . \quad . \quad (31)$$

Hieraus findet man, nach der Methode des § 1, die der (9) entsprechenden Beziehung

$$(n-1)^2\; U'_n - [(n-1)\, n\, y - 1]\; U'_{n-1} + n^2\; U'_{n-2} = 0 \quad . \quad (32)$$

Es bilden also auch

$$U_n, \quad U'_n, \quad U'_{n-1}, \quad U'_{n-2} \; . \; . \; . \; U'_1$$

eine Sturm'sche Kette.

Durch Anwendung der aus (19) und (30) fliessenden Gleichungen

$$Y_n + U_n = 2\; Q_n \quad \text{und} \quad Y_n - U_n = 2\; Q_{n-1}$$

bekommt man aus (7) und (31), beziehungsweise aus (9) und (32), wieder die Gleichungen (27) und (28).

6. Um zu einer Beziehung zwischen P_n, P'_n und P'_{n-1} zu gelangen, benutzt man die Gleichungen

$$Q_{n-1} = P_n : y \quad \text{und} \quad Q'_{n-1} = y^{-1} P'_n - y^{-2} P_n .$$

Aus $(n-1)\, Q_{n-1} - y\, Q'_{n-1} + 2\, Q'_{n-2} = 0$ (vergel. (27)).

erhält man dann

$$n\, y\, P_n - y^2\, P'_n + 2\, y\, P'_{n-1} - 2\, P_{n-1} = 0 \quad . \; . \; . \quad (33)$$

Durch Elimination von Q'_{n-3} ergibt sich aus den Gleichungen

$$(n-2)\, Q_{n-2} - y\, Q'_{n-2} + 2\, Q'_{n-3} = 0 \qquad \text{(vergl. (27))}$$

und

$$(n-2)\, Q'_{n-1} - (n-1)\, y\, Q'_{n-2} + n\, Q'_{n-3} = 0 \quad \text{(vergl. (28))}$$

die neue Gleichung

$$n\, Q_{n-2} - 2\, Q'_{n-1} + y\, Q'_{n-2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

aus welcher sodann hervorgeht, dass

$$2\, P_n - 2\, y\, P'_n + y^2\, P'_{n-1} + (n-1)\, y\, P_{n-1} = 0 \quad . \; . \quad (35)$$

Schliesslich bekommt man nun durch Elimination von P_{n-1} zwischen (33) und (35) die gewünschte Gleichung

$$[n\,(n-1)\, y^2 + 4]\, P_n - [(n-1)\, y^3 + 4\, y]\, P'_n + 2\, n\, y^2\, P'_{n-1} = 0 \quad . \quad (36)$$

Hieraus findet man nun durch das in § 1 benutzte Verfahren

$$[(n-1)\,(n-2)\, y^2 + 4]\, P'_n - [(n-2)\, y^3 + 5\, y]\, P'_{n-1} +$$
$$+ [2\,(n-1)\, y^2 + 1]\, P'_{n-2} = 0 \quad . \quad (37)$$

Auch die Functionen P_n, $P'_k\, (k = n, \; n-1, \; . \; . \; . \; . \; 2, \; 1)$ *bilden somit eine Sturm'sche Kette.*

Es ist mir nicht gelungen zwei den letzten analoge Gleichungen für die allgemeine Function W_n auf zu stellen; sie dürften aber sehr complizirt sein.

7. Die Gleichungen

$$Y_n = \prod_1^n \left(y - 2 \cos \frac{2k}{2n+1}\pi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

$$U_n = \prod_0^{n-1} \left(y - 2 \cos \frac{2k+1}{2n+1}\pi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$V_n = \prod_0^{n-1} \left(y - 2 \cos \frac{2k+1}{2n}\pi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

$$Q_n = \prod_1^n \left(y - 2 \cos \frac{k}{n+1}\pi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

gestatten, vermöge der zwischen jenen Functionen obwaltenden Beziehungen

$$Y_n = Q_n + Q_{n-1} = (y+1)\, Q_{n-1} - Q_{n-2} \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

$$U_n = Q_n - Q_{n-1} = (y-1)\, Q_{n-1} - Q_{n-2} \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

$$V_n = Q_n - Q_{n-2} = y\, Q_{n-1} - 2\, Q_{n-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

$$Q_{2m} = V_{2m} + V_{2m-2} + \ldots + V_2 + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

$$Q_{2m+1} = V_{2m+1} + V_{2m-1} + \ldots + V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

die Aufstellung einer grossen Anzahl von Gleichungen zwischen gewissen Cosinusproducten.

Beispielsweise erhält man für $y = 0$, aus (42), (38) und (41)

$$\prod_1^{2m} \cos \frac{2k}{4m+1}\pi = \prod_1^{2m} \cos \frac{k}{2m+1}\pi \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

$$2 \prod_1^{2m+1} \cos \frac{2k}{4m+3}\pi = - \prod_1^{2m} \cos \frac{k}{2m+1}\pi . \quad . \quad . \quad (48)$$

$$4 \prod_1^{2m} \cos \frac{2k}{4m+1}\pi = - \prod_1^{2m-2} \cos \frac{k}{2m-1}\pi . \quad . \quad . \quad (49)$$

Analog liefert (43) die Beziehungen

$$\prod_0^{2m-1} \cos \frac{2k+1}{4m+1}\pi = \prod_1^{2m} \cos \frac{k}{2m+1}\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

$$2 \prod_0^{2m} \cos \frac{2k+1}{4m+3}\pi = \prod_1^{2m} \cos \frac{k}{2m+1}\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

$$4 \prod_0^{2m-1} \cos \frac{2k+1}{4m+1}\pi = - \prod_1^{2m-2} \cos \frac{k}{2m-1}\pi \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Aus (44) ergibt sich, für $y = 0$,

$$4 \prod_0^{2m-1} \cos \frac{2k+1}{4m}\pi = 4 \prod_1^{2m} \cos \frac{k}{2m+1}\pi - \prod_1^{2m-2} \cos \frac{k}{2m-1}\pi \quad . \quad (53)$$

$$2 \prod_0^{2m-1} \cos \frac{2k+1}{4m}\pi = - \prod_1^{2m-2} \cos \frac{k}{2m-1}\pi \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Anderseits erhält man aus

$$\left(\frac{V_{2m+1}}{y}\right)_{y=0} = \left(\frac{Q_{2m+1}}{y}\right)_{y=0} - \left(\frac{Q_{2m-1}}{y}\right)_{y=0} = Q_{2m}\,(0) - 2\left(\frac{Q_{2m-1}}{y}\right)_{y=0}$$

noch die Gleichungen

$$4 \prod \cos \frac{2k+1}{4m+2}\pi = 4 \prod \cos \frac{k}{2m+2}\pi - \prod \cos \frac{k}{2m}\pi \quad . \quad (55)$$

($k = 0$ bis $m-1$ und $m+1$ bis $2m$) ($k = 1$ bis m und $m+2$ bis $2m+1$) ($k = 1$ bis $m-1$ und $m+1$ bis $2m-1$)

$$2 \prod \cos \frac{2k+1}{4m+2}\pi = 2 \prod_1^{2m} \cos \frac{k}{2m+1}\pi - \prod \cos \frac{k}{2m}\pi \quad . \quad (56)$$

($k = 0$ bis $m-1$, $m+1$ bis $2m$) ($k = 1$ bis $m-1$, $m+1$ bis $2m-1$)

Sodann fliesst aus (45) durch die Substitution $y = 0$

$$4^m \prod_1^{2m} \cos \frac{k}{2m+1}\pi = 4^m \prod_0^{2m-1} \cos \frac{2k+1}{4m}\pi + 4^{m-1} \prod_0^{2m-3} \cos \frac{2k+1}{4m-4}\pi \ldots$$

$$\ldots + 4 \cos \frac{1}{4}\pi \cos \frac{3}{4}\pi + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Und wenn man (46) durch y theilt und nachher $y = 0$ setzt,

$$4^{m-1} \prod_{1}^{2m-1} \cos \frac{k}{2m} \pi = 4^{m-1} \prod_{0}^{2m-2} \cos \frac{2k+1}{4m-2} \pi + 4^{m-2} \prod_{0}^{2m-4} \cos \frac{2k+1}{4m-6} \pi \ldots$$

($k = m$ ausgenommen) ($k = m-1$ ausg.) ($k = m-2$ ausg.)

$$\ldots + 4 \cos \frac{1}{6} \pi \cos \frac{5}{6} \pi + 1 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Durch Vergleichung der Coëfficienten gleich hoher Potenzen von y lassen sich aus den Beziehungen (38) bis (46) weitere, aber weniger einfache, Gleichungen herleiten.

Diese Bemerkung gilt offenbar auch für die Formeln (7), (8), (9) und die damit analogen.

Für $y = 0$ liefert z.B. (8) $Y_n(0) + Y_{n-2}(0) = 0$ oder

$$4 \prod_{1}^{n} \cos \frac{2k}{2n+1} \pi + \prod_{1}^{n-1} \cos \frac{2k}{2n-3} \pi = 0 \quad . \quad . \quad (59)$$

Analog entsprechen den Functionen U_n, V_{2m} und Q_{2m} die Formeln

$$4 \prod_{0}^{n-1} \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi + \prod_{0}^{n-3} \cos \frac{2k+1}{2n-3} \pi = 0 \,. \quad . \quad . \quad (60)$$

$$4 \prod_{0}^{2m-1} \cos \frac{2k+1}{4m} \pi + \prod_{0}^{2m-3} \cos \frac{2k+1}{4m-4} \pi = 0 \,. \quad . \quad . \quad (61)$$

$$4 \prod_{1}^{2m} \cos \frac{k}{2m+1} \pi + \prod_{1}^{2m-2} \cos \frac{k}{2m-1} \pi = 0 \quad . \quad . \quad (62)$$

Schliesslich liefern $V_{2m+1} : y$ und $Q_{2m+1} : y$ für $y = 0$ aus den entsprechenden Formeln

$$4 \prod_{0}^{2m} \cos \frac{2k+1}{4m+2} \pi = 4 \prod_{0}^{2m-1} \cos \frac{2k+1}{4m} \pi - \prod_{0}^{2m-2} \cos \frac{2k+1}{4m-2} \pi \,. \quad (63)$$

($k = m$ ausg.) ($k = m-1$ ausg.)

$$4 \prod_{1}^{2m+1} \cos \frac{k}{2m+2} \pi = 4 \prod_{1}^{2m} \cos \frac{k}{2m+1} \pi - \prod_{1}^{2m-1} \cos \frac{k}{2m} \pi \quad . \quad . \quad (64)$$

($k = m+1$ ausg.) ($k = m$ ausg.)

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt namens den Heer A. SMITS eene mededeeling aan: „*Beschrijving van den Mikromanometer.*"

Door prof. V. A. JULIUS aangemoedigd, heb ik lang gezocht om, naar de voorstelling van KRETZ [1]), een zeer gevoeligen manometer te vervaardigen.

Het principe, waarop deze manometer berust, is het volgende.

Gesteld wij hebben eene verticaal geplaatste U-vormige buis, waarvan de beenen aan het boveneinde uitloopen in wijde vaten. Noemen wij dan de doorsnede van het wijde vat D en die van de nauwe buis d, zoo zal, gesteld dat de manometer tot in de wijde vaten gevuld is met eene vloeistof en dan op de oppervlakte aan de eene zijde eene drukking wordt uitgeoefend, waardoor de vloeistofspiegel 1 mm. naar omlaag gaat, eene vloeistoflaag in de nauwe buis eene verplaatsing ondergaan van $\frac{D}{d}$ mm.

Om de vergroot overgebrachte verplaatsing in de beenen van den manometer te kunnen waarnemen, moeten wij ons bedienen van twee vloeistoffen, die liefst weinig in elkaar oplossen en een duidelijk scheidingsvlak vormen. Deze vloeistoffen nu moeten zoo in den manometer gebracht worden, dat de scheidingsvlakten zich bevinden in de nauwe beenen. Het vinden nu van deze twee vloeistoffen is de moeielijkheid. Daar ik met den manometer in 't luchtledig wilde werken, koos ik voor de lichtste vloeistof water, daar dit door middel van olie zoo gemakkelijk kan worden afgesloten. De tweede vloeistof nu moest aan verschillende eischen voldoen.

1e moet zij zwaarder zijn dan water, doch het verschil in spec. gew. met water moet zoo klein mogelijk zijn (hetgeen uit de formule die hier volgt blijkt);

2e moet zij een duidelijken, liefst bollen meniscus met water vormen;

3e moet zij, wil men met den manometer de grootst mogelijke gevoeligheid bereiken, niet aan den glaswand hangen, doch in een kanaaltje van water loopen.

Na lang zoeken vond ik dat aniline, en ook naar mijn weten aniline alléén, aan al deze eischen volkomen voldoet.

Aniline lost moeielijk in water op; een deel aniline lost op in 31

---

[1]) Cours de physique d. M. Jamin edit, III T. I.

deelen water bij 12°. Zij geeft een prachtigen meniscus met water en heeft bij 20° een spec. gew. van 1.022.

Vult men een manometer van natronglas eerst met water, en laat men daarna de gewenschte hoeveelheid aniline toevloeien, zoo zal deze na verloop van eenigen tijd zich in het onderste gedeelte van den manometer hebben verzameld, en daar aan het glas kleven. Kookt men nu echter het water met de aniline te zamen in den manometer, zoo zal de aniline al meer en meer de aanhankelijkheid tegenover glas verliezen, en ten slotte in een kanaaltje van water gaan loopen. Dit is echter alleen het geval, als de manometer eerst met eene geconcentreerde oplossing van Na OH, en daarna met koningswater goed is uitgekookt, want de kleinste verontreiniging maakt dat de aniline aan het glas aanhangt. De eerste manometers werden door mij op deze wijze gevuld, en hielden zich uitstekend. Toen ik echter daarna met een manometer van Jenaglas op dezelfde wijze handelde, slaagde ik er niet in door koking te verkrijgen, dat de aniline in een kanaaltje van water liep. De oorzaak van dit verschijnsel kon alleen hierin gelegen zijn, dat door het koken van het water in den manometer van natronglas, een weinig glas was opgelost, hetgeen bij den manometer van Jenaglas niet gebeurde. Daar water dat langen tijd met natronglas in aanraking is geweest eene alcalische reactie vertoont, nam ik achtereenvolgens de proef met natrium-hydroxyde, en met natrium-carbonaat, en vond dat ongeveer 1 cm^3 van een normaal-oplossing, gebracht in een halven liter water, voldoende waren, de aniline in een kanaaltje te doen loopen. Deze kleine hoeveelheden Na OH en Na_2 CO_3 in het water waren echter oorzaak, dat de olijfolie, die er op werd geschonken, langzamerhand verzeepte, hetgeen aanleiding gaf tot bederf van den manometer. Dit bezwaar verdween, door, in plaats van olijfolie, machine-olie te nemen, doch hierdoor kwam voor mij weer een ander bezwaar te voorschijn.

Deze machine-olie nl. bleek voor mijn doel een te groote dampspanning te bezitten. Nu nam ik de proef met eene glasoplossing. Ik nam daartoe 5 nieuwe reageerbuizen en bracht deze fijn gestampt in een halven liter water, dat gedurende een kwartier aan 't koken werd gehouden. Deze oplossing gaf eene zwak alcalische reactie. Bracht ik 40 cm^3 van deze oplossing in een halven liter water, zoo verkreeg de aniline, nadat zij zooals in het eerste geval met deze verdunde oplossing was verwarmd geworden, weder haar goede eigenschappen. Olijfolie, op deze zoo uiterst verdunde oplossing gegoten, werd niet verzeept.

In het onderste gedeelte van de beenen van den manometer bevindt

zich eene kolom water. Het water vult ook een gedeelte van de wijde vaten, en is van de lucht afgesloten door een laag olijfolie.

Wordt nu op eene der olielagen een druk uitgeoefend, die zou kunnen worden gemeten door $\varkappa$ mM. water van de dichtheid ι, dan ontstaat tusschen de twee toppen der anilinekolom een hoogteverschil van ϱ mM., dat kan worden berekend uit de formule.

$$\varkappa = \varrho \left(S_a - \frac{D-d}{D} S_w\right)$$

waarin S_a het soortelijk gewicht der aniline en S^w dat van water voorstelt.

Is D oneindig groot ten opzichte van d, zoo wordt deze vergelijking

$$\varkappa = \varrho \left(S_a - S_w\right)$$

bij 20° is $S_a = 1.022$
en $S_w = 0.998$ dus $\varrho = 41.6\ \varrho$.
$S_a - S_w = 0.024$

De gevoeligheid zou dan zijn 41.6 maal zoo groot als die van een water manometer.

In werkelijkheid heb ik in den manometer geen water, doch eene zeer verdunde oplossing. Dit heb ik nu echter niet in rekening gebracht.

De gevoeligheid van den manometer is op twee verschillende wijzen bepaald.

Ten eerste door de hellingsmethode. Laat men den manometer hellen, zoo verkrijgt hij eene uitwijking. Weet men nu den hoek van helling, en weet men den verticalen afstand der aniline-oppervlakken, zoo is hieruit gemakkelijk de gevoeligheid te berekenen.

Ten tweede, door eene bekende gewichtshoeveelheid olie toe te laten vloeien, en de uitwijking die daardoor is ontstaan te meten.

De manometer bleek ook zeer gevoelig te zijn voor kleine temperatuur-verschillen; voor 1° temp. verhooging neemt de uitwijking van mijn instrument met 3 pCt. toe. Het is daarom noodig den manometer op constante temperatuur te houden, hetgeen ik verkreeg door hem in een bak te plaatsen, waardoor water van de waterleiding stroomt. De temp. van het water verandert in den loop van den dag niet meer dan 0.2°.

Met de niet genoeg te waardeeren hulp van Prof. JULIUS, is het mij gelukt een toestel samen te stellen, om de dampdruk-vermindering van zeer verdunde oplossingen bij 0° na te gaan.

Eenigen tijd geleden deed DIETERICI [1]) hetzelfde, doch was met zijn aneroïde slechts zeker van 0.01 mm. kwik.

Voor mijn manometer is $(S_a - \frac{D-d}{D} S_w)$ bij 18° ongeveer = **30**

Hij is dus 30 maal zoo gevoelig als een water-manometer. Daar de manometer bij dezelfde helling en bij dezelfde drukking steeds op $^1/_{50}$ mM. nauwkeurig dezelfde uitwijking geeft, kan men, zoo men alle mogelijke voorzorgsmaatregelen neemt, onder de gunstigste omstandigheden zeker zijn van $^1/_{1500}$ mM. water of $^1/_{20250}$ mM. kwik; zonder eenige moeite kan men een nauwkeurigheid van $^1/_{4000}$ mM. kwik bereiken.

Ofschoon ik eerst aan het begin van mijn onderzoek ben, zij het mij vergund Prof. JULIUS mijnen hartelijken dank uit te spreken voor de groote hulp en steun, mij bij het physische gedeelte van het onderzoek verleend.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Dr. P. ZEEMAN eene mededeeling aan, getiteld: *Metingen over de absorptie van electrische trillingen in electrolyten*, verricht in het Natuurkundig Laboratorium te Leiden.

Bij gelegenheid van ons gemeenschappelijk onderzoek, waarvan de resultaten de vorige maand aan de Akademie werden meegedeeld [2]), heeft Prof. COHN in Straatsburg mij voorgeslagen om de theorie van MAXWELL op de proef te stellen voor zoover betreft een der gevolgen, die er uit voortvloeien over de voortplanting van electrische trillingen in *geleiders*, en wel overeenkomstig het volgende plan:

De trillingen ondergaan in den geleider eene absorptie. De grootte dezer absorptie hangt in het algemeen af van het *geleidingsvermogen* en het *specifiek induceerend vermogen* van den geleider, en van het *trillingsgetal* en de *dempingsconstante* van den vibrator. Kiest men echter, bij gegeven trillingsgetal en bij benadering bekend spec. induc. vermogen, het geleidingsvermogen groot genoeg, dan kan men den invloed van het spec. induc. vermogen zoo klein maken als men wenscht. Er zouden nu electrolyten van zoo groot gelei-

---

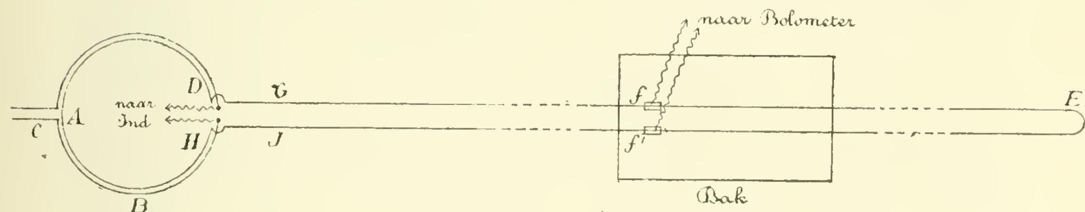
[1]) Wied. Ann. Band 50.

[2]) COHN en ZEEMAN, Zitting 28 Sept. 1895.

dingsvermogen onderzocht worden, dat van de beide electrische constanten er van, hoofdzakelijk alleen nog het gemakkelijk te meten geleidingsvermogen invloed had. Trillingsgetal en demping der primaire trilling zouden volgens BJERKNES' methode bepaald worden. Verder zou de vermindering van de energie der trillingen in den electrolyt bepaald worden door langs twee evenwijdige draden in het inwendige van de vloeistof kleine Leidsche fleschjes te verschuiven, die de energie aan een bolometer overbrachten. Het zoo bepaalde verloop der absorptie zou worden vergeleken met dat, hetwelk volgens MAXWELL's theorie uit de drie genoemde grootheden kan worden berekend.

Dit onderzoek heb ik in het Natuurkundig Laboratorium te Leiden thans begonnen. De gunstige resultaten, verkregen met de methode die in de genoemde verhandeling beschreven werd, deden mij verwachten, dat zij ook direct zou kunnen dienen voor het onderzoek der absorptie. Dit is mij niet mogelijk gebleken. Wel kon vastgehouden worden aan 1°. het meten door afzonderlijke proeven van de golflengte en demping der trillingen in lucht, 2°. het meten van de energie met *fleschjes in de vloeistof*. Doch overigens moest ik de inrichting der proeven wijzigen. De voorloopige bepaling van den absorptiecöefficient voor HERTZ'sche trillingen in een electrolyt schijnt mij van genoegzaam belang om deze reeds nu mede te deelen.

2. *Methode.* In onderstaande figuur is schematisch de inrichting der proeven voorgesteld. B is een vibrator van BLONDLOT, waarbij een Rhumkorff als inductorium werd gebruikt. De primaire stroom



werd door een roteerenden interruptor verbroken. De interruptor was bevestigd op de as van een electromotor. Het aantal omwentelingen bedroeg 1200 per minuut. De regelmatigheid der trillingen is grooter dan met den Foucault-interruptor. De draadgeleiding AHJEGD, die de HERTZ'sche trilling opneemt, bestaat uit koperdraad van ongeveer 1 mM. dikte, terwijl de draadafstand bedraagt 7 cM.

Tusschen A en den bakdieden electrolyt bevat is, volgens BJERKNES' beginsel, ongeveer 60 M. draad uitgespannen en de dubbelleiding zet zich door den bak heen nog over ongeveer 34 M. voort en is bij E gesloten. Door f en f' zijn de fleschjes (van 6 windingen van zeer dun draad) aangegeven, die met den bolometer [1]) in verbinding staan en die dus de energie *in de vloeistof* meten. Ze zijn onderling vast verbonden en kunnen gemakkelijk langs de draden verschoven worden. De grootte der verplaatsing is op een verdeeling op den rand van den bak af te lezen.

De lengte van den draad werd volgens BJERKNES' beginsel gekozen. De trillingen door den vibrator uitgezonden, komen, na gedeeltelijke terugkaatsing aan het grensvlak van den electrolyt, waar zich, in tegenstelling met de proeven bij zuiver water [2]), *geen brug* bevindt, eerst bij A terug als de primaire trilling is afgeloopen. Aldus wordt verkregen dat de primaire trilling dezelfde blijft of men den bak met den electrolyt aanbrengt of niet.

Het *niet* teruggekaatste deel der trillingen komt *in den bak*. Door een geschikte keus van de concentratie der zoutoplossing kan worden bereikt dat aan het eind van den bak de energie van een bepaalde trilling geheel geabsorbeerd is. De bedoelde trilling zal, daar zij niet meer teruggekaatst wordt, slechts eenmaal langs de fleschjes trekken en er zullen geen staande trillingen van dit trillingsgetal kunnen optreden. De afwezigheid van deze staande trilling wijst er ook omgekeerd op dat werkelijk aan 't uiteinde de energie, behoorende bij dit trillingsgetal, is geabsorbeerd.

De bepaling van de *golflengte* en *demping* der trillingen *in de lucht* geschiedde volgens BJERKNES' voorschriften [3]). De bak is dan natuurlijk verwijderd en een horizontaal uitgespannen deel der leiding (in ons geval ruim 10 M. lang) dient voor de verschuiving van de brug, terwijl de fleschjes (6 windingen) de plaats van den electrometer van BJERKNES innemen. De uit de metingen volgende interferentiekromme verliep zeer fraai als gedempte sinuslijn. De geheele golflengte der invallende trillingen werd bepaald op 6.40 M., voor de dempingsconstante γ van BJERKNES werd 0.35 gevonden.

In de vloeistof werden met de fleschjes metingen verricht bij opeenvolgende standen, die telkens 2.5 cM. verder in de vloeistof gelegen waren. Er werden telkens 2 reeksen van deze waarnemingen

---

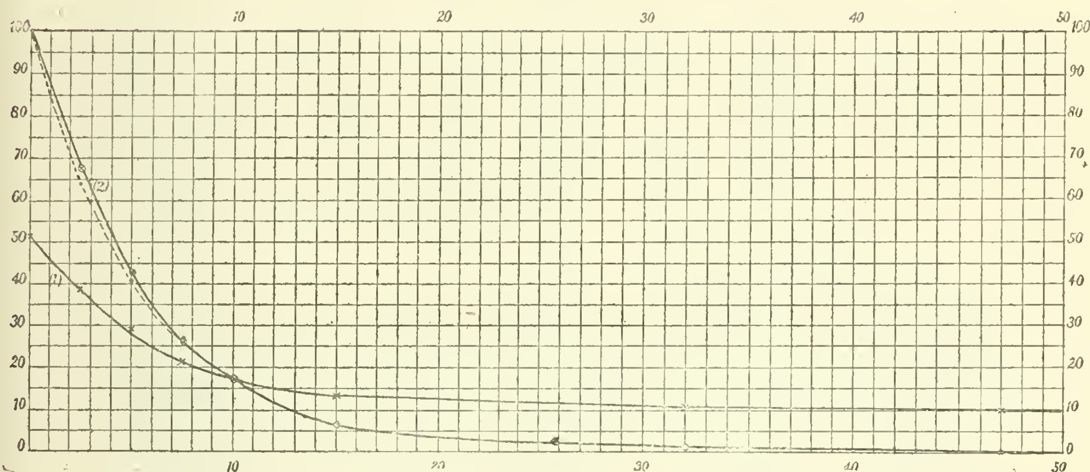
[1]) l. c. p. 3.

[2]) l. c. p. 3.

[3]) BJERKNES, Bihang till K. Sv. Vet. Akad. Bd. 20. Afd. I. N°. 5 p. 7. 1895.

verricht, de eerste bij beweging der fleschjes van den vibrator af, de tweede bij beweging er naar toe

3. *Resultaat.* Voor een keukenzoutoplossing, waarvan het geleidingsvermogen t. o. v. kwikzilver bleek te zijn bij 15° C. $\lambda = 3200.10^{-10}$, zijn in de tweede figuur (1) de verkregen uitkomsten grafisch voorgesteld. De doorloopen laag vloeistof is als abscis, de correspondeerende uitslag van den bolometer als ordinaat



uitgezet. De laatste is afgeleid uit het gemiddelde van 3 dubbelreeksen. Aan het einde van den bak blijft een constante uitslag bestaan, die aan een op de gewone electriciteitsbeweging in den vibrator gesuperponeerde beweging, waarschijnlijk een zeer lange golf, moet worden toegeschreven. Ook *achter* den bak werd ongeveer een zelfde uitslag geconstateerd als in den bak aan het uiteinde. Het schijnt dus tot nader onderzoek niet te gewaagd, alle ordinaten met dezen uitslag te verminderen. De kromme, die verkregen wordt uit (1), wanneer dit geschiedt en wanneer vervolgens de uitslag bij 't begin 100 wordt gesteld en de andere getallen hiernaar gereduceerd worden, is als (2) in de fig. geteekend. In de volgende tabel zijn de gegevens, waarop de kromme berust, aangegeven. In de eerste kolom de lengte van de doorloopen vloeistof in cM., in de tweede de op 100 gereduceerde waargenomen uitslagen, in de derde de waarden die volgen uit de formule $100.\, e^{-2pz}$, als z de lengte van de doorloopen vloeistof en $p = 0{,}0884$ gesteld wordt. Deze kromme is in de fig. gestippeld voorgesteld.

Doorloopen vloeistof.	Waargenomen uitslag.	Berekende uitslag.
0	100	100
2.5	67	64
5	42	41
7.5	26	27
10	17	17
12.5	11	11
15	7	7
31	2	2
47	0	0

Hieruit zou dus volgen dat 1°. bij het doorloopen van een electrolyt, de intensiteit der trillingen binnen de grenzen der fouten van waarneming logarithmisch afneemt, 2°. dat voor de nu gebruikte golven, bij 't doorloopen van een laag van 5.7 cM. in een zoutoplossing van $\lambda = 3200.10^{-10}$, de intensiteit op het $^1/_e{}^{de}$ deel daalt.

Dit is, voor zoover mij bekend is, de eerste bepaling van een absorptie-coëfficiënt voor electrische trillingen. Het behoeft wel geen betoog dat het voorafgaande verre van volledig is en dat in het bijzonder de onderstelling omtrent den constanten uitslag nog nader onderzoek verlangt. Ik stel mij echter voor binnenkort het onderwerp vollediger te behandelen, en dan tevens na te gaan in hoeverre of de waarde van p, uit theoretische beschouwingen afgeleid, met de waarnemingen overeenstemt.

Natuurkunde. — De Heer Kamerlingh Onnes biedt namens Dr. H. J. Oosting te den Helder eene mededeeling aan, getiteld: *Stroboskopisch onderzoek en intermitteerende photographie bij gedwongen trillingen van gespannen caoutchoucdraden*".

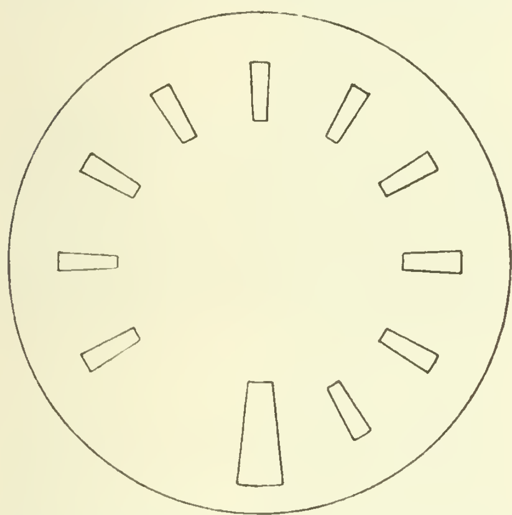
Aan het slot mijner mededeeling over gedwongen trillingen van caoutchoucdraden [1]) heb ik eene mededeeling aangekondigd over

[1]) Zittingsverslag van 23 Febr. 1895.

onderzoekingen volgens de stroboskopische methode en volgens eene nieuwe methode, die ik die der intermitteerende photographie heb genoemd.

De eerste methode is gemakkelijk aldus toe te passen. Op de as van den electrischen motor, die den draad in trilling brengt, is eene schijf *a* aangebracht. De beweging daarvan wordt door middel van een koord zonder eind overgebracht op een op eenigen afstand voor den draad opgestelde schijf *b*, waarvan de middellijn iets verschilt van die van de eerste schijf. Op dezelfde as met de schijf *b* is een kartonnen schijf met eene opening aangebracht. Men bekijkt nu den trillenden draad door deze opening, of laat door deze opening licht op den draad vallen. Is de middellijn van de schijf *b* iets grooter dan die van *a*, dan ziet men de witte punten van den draad hunne banen in de ware richting doorloopen.

De methode der intermitteerende photographie is als volgt:



De beweging van de as van den electrischen motor wordt, door middel van een kruk, overgebracht op een as, die in het verlengde er van ligt en die tot boven de op een afstand van ongeveer $2\frac{1}{2}$ meter geplaatste photographische camera loopt. Aan het eind wordt de draaiing van deze as verticaal naar beneden overgebracht op een as, waarop een in bijgaande figuur op halve grootte afgebeelde zinken schijf met openingen is aangebracht. Deze schijf draait vóór het objectief der camera, zoo dat de openingen voor het objectief passeeren, waarop een dop is aangebracht met eene opening gelijk aan de grootste opening der schijf [1]).

De ellipsen van de witte punten van den trillenden draad worden aldus opgelost in eene reeks van punten of streepjes. De draaiing van de schijf heeft in dien zin plaats, dat de groote opening wordt opgevolgd door de plaats waar eene opening is weggelaten. Men kan dus de reeks van punten bij de ellipsen beschouwen als eene

[1]) De beste plaats voor de draaiende schijf zou die van het diaphragma van het objectief zijn, maar dan zou dit speciaal voor het doel moeten worden geconstrueerd.

pijl, waarvan het krachtig gephotographeerde punt de spits vormt, en die de richting aangeeft waarin de ellips doorloopen wordt. De methode leert dus tegelijk alles wat moment-photographieën en de stroboskopische methode samen kunnen doen kennen.

Bijgaande reproductie [1]) op ware grootte is genomen naar eene photographie van een draad van 150 cM. bij eene trilling, nagenoeg overeenkomende met het in Fig. 10 van de vorige mededeeling voorgestelde geval.

Het maken van de beschreven inrichting heeft eenige moeite gekost door de snelheid, die vereischt wordt en het weinige vermogen van den kleinen motor. De lange, 256 cM. boven de vloer geplaatste horizontale as bestaat uit 3 deelen, en wel beukenhouten stokken, eindigend in geel koperen pennen, die de beweging op elkaar overbrengen door krukjes. De pennen loopen op raderen en worden van boven opgesloten door een derde rad. De verticale overbrenging geschiedt door 2 gelijke schijven waarover een koord loopt. Bovendien zijn in de schijven excentriek pennen aangebracht, die door eene verticale staaf zijn verbonden, welke met hare uiteinden op deze pennen draait.

Ik hoop de beschreven methode ook toe te passen tot het onderzoek van gedwongen trillingen van staven, waarbij aan het éene uiteinde eene transversale trilling wordt medegedeeld, terwijl het andere vrij is. Voorloopige proeven hebben mij geleerd, dat de punten van zulk een staaf in de nabijheid eener knoop zeer merkwaardige banen beschrijven. Misschien is de methode nog voor uitgebreider toepassing vatbaar.

Physiologie. — De Heer PEKELHARING biedt voor de verhandelingen der Afdeeling aan een manuscript van den Heer W. KOSTER GZN. te Utrecht, getiteld: „*Eene methode ter bepaling van het draaipunt van het oog*". De Heeren PLACE en KAMERLINGH ONNES verklaren zich op verzoek des Voorzitters bereid, daarover in de November-zitting verslag uit te brengen.

— Als boekgeschenken worden aangeboden: door den Heer SCHOLS een exemplaar van den 5den druk van zijn werk „Landmeten en Waterpassen", en door den Heer C. A. J. A. OUDEMANS een exemplaar van den 2en druk van zijn Leerboek der Plantenkunde, 2de deel 1ste gedeelte: Vormleer der Planten.

---

[1]) Bij de reproductie zijn rechts en links verwisseld.



H. J. Oosting.

— De Voorzitter stelt voor om aan het Institut de France, bij gelegenheid van de herdenking van zijn 100-jarig bestaan, een brief van gelukwensching te doen toekomen. Aldus wordt besloten.

— De vergadering wordt gesloten.

E R R A T A.

Op blz. 123 staat $\begin{array}{c} gl. \longrightarrow fr. \\ \searrow \quad \swarrow \\ m. \end{array}$ hiervoor te lezen $gl. \longleftrightarrow fr. \longleftrightarrow m.$

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN.

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 30 November 1895.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer C. A. J. A. OUDEMANS.

Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Kennisgevingen van de Heeren HOOGEWERFF en TREUB, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Een brief van dankzegging van l'Institut de France (18 November 1895), voor de belangstelling, door de Akademie betoond bij gelegenheid van de herdenking van zijn honderdjarig bestaan.

3°. Een brief van de familie PASTEUR te Parijs (28 November 1895), met dankzegging voor de belangstelling, haar door de Akademie

12

betoond na het overlijden van wijlen haar buitenlandsch Lid, den Hoogleeraar Louis Pasteur.

— De Heeren van der Waals, Lorentz en Kamerlingh Onnes dragen, bij monde van den tweede, het concept-antwoord voor, te richten tot Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken, naar aanleiding van Z.Exc[s]. schrijven over het aanbrengen van nieuwe bliksemafleiders op het Mauritshuis te 's Gravenhage (1 Juni 1895). — Het verslag luidt als volgt:

In de maand Juni jl. werd door den Minister van Binnenlandsche Zaken het oordeel der Natuurkundige Afdeeling gevraagd over een plan tot het aanbrengen van nieuwe bliksemafleiders op het Mauritshuis te 's Gravenhage, welk plan door het Bestuur der Afdeeling in onze handen werd gesteld. Daar het schrijven van den Minister van geene andere toelichting vergezeld ging dan een platte grond, gaven wij in overweging, opgaaf van meer bijzonderheden te verzoeken. Dit geschiedde bij een schrijven der Afdeeling van 2 Juli, en tengevolge daarvan ontvingen wij thans, met eene kopy van dezelfde teekening, een afschrift van het voor de aanbesteding opgemaakte bestek. Alvorens nu — voor zoover de ook nu nog zoo spaarzaam verstrekte gegevens dit toelaten — een oordeel uit te spreken, wenschen wij eene algemeene opmerking te maken.

Er is een tijd geweest, toen men meende, het vraagstuk der bescherming van een gebouw tegen den bliksem vrij wel te kunnen oplossen en op grond van de wetten der electriciteitsleer te kunnen aangeven, hoe een afleider moet worden geconstrueerd. Herhaaldelijk hebben enkele natuurkundigen of voor dit doel aangewezen commissiën voorschriften dienaangaande gegeven en niet zelden werd daarbij aan de bouwkundigen, die zich stipt aan de gestelde regels zouden houden, eene zoo goed als volstrekte beveiliging voorgespiegeld.

Na de onderzoekingen der laatste tientallen van jaren zal, gelooven wij, geen natuurkundige nog met zooveel zelfvertrouwen durven spreken. Het vraagstuk is inderdaad veel ingewikkelder gebleken dan men vroeger meende. De meerdere kennis van de wetten der electriciteitsbeweging kan slechts weinig baten zoo lang ons de oorsprong van het onweder onbekend is en ons, deels ten gevolge daarvan, de numerieke gegevens ontbreken, die voor de toepassing noodig zouden zijn. Om te kunnen voorspellen of een bliksemstraal eene vangstang zal treffen dan wel een ander punt van het gebouw,

en verder wat er zal plaats hebben, als een afleider wordt getroffen; of in dit geval de ontlading al dan niet op naburige voorwerpen zal overspringen, daartoe zou men eenig denkbeeld moeten hebben van de hoeveelheid electriciteit, die moet worden afgevoerd, het bedrag van het arbeidsvermogen en vooral ook van den tijdsduur eener ontlading. Men kan zich dezen laatsten zoo *lang* voorstellen, dat werkelijk de oude theorie van kracht blijft, maar ook zoo *kort*, dat geen afleider, hoe ook ingericht, eenige noemenswaardige beschutting zou kunnen bieden.

Gelukkig wordt het gebrekkige onzer kennis van het natuurverschijnsel eenigermate vergoed door de ervaring van vele jaren omtrent bestaande afleiders. Daaruit is gebleken dat de omstandigheden al uiterst ongunstig moeten zijn, als een in goeden staat verkeerende afleider niet van eenig en zelfs belangrijk nut zal wezen, maar tevens dat onberekenbare en soms zeer raadselachtige ongevallen niet met zekerheid kunnen worden voorkomen. Terwijl het dus onverantwoordelijk zou zijn, belangrijke gebouwen niet van afleiders te voorzien en niet bij het ontwerpen daarvan met alle gegevens der wetenschap rekening te houden, moet men er op bedacht zijn dat de genomen voorzorgen wellicht in het licht van latere onderzoekingen niet geheel voldoende, of, wat evengoed mogelijk is, overdreven zullen blijken.

Natuurlijk zullen bij den aanleg ook finantieele overwegingen, in verband met de waarde van hetgeen men wenscht te behouden, te pas mogen komen.

Het bovenstaande moge doen zien, in welken geest wij gaarne de opmerkingen zouden zien opgevat, die wij thans over de onderdeelen van het plan laten volgen.

a. Het algemeene beginsel. Het bestek spreekt in § 1 van bliksemafleiders volgens het stelsel MELSENS. Voor zoover het eigenaardige van dit stelsel bestaat in een vrij groot aantal afleiders, moeten wij de keus ervan toejuichen. Het lijdt geen twijfel dat bij een uitgestrekt gebouw eene tamelijke beveiliging alleen kan verkregen worden door een zeker aantal afleiders, die behoorlijk met elkander en met de aarde verbonden zijn.

b. De vangstangen. Blijkens het bestek zullen 21 vangstangenbundels worden aangebracht, waarmede ongetwijfeld de zoogenaamde „aigrettes" van MELSENS bedoeld zijn. Wij kunnen dit niet goedkeuren, althans niet dat *alleen* deze „aigrettes" zullen worden gebezigd. Wij kunnen ons nl. volstrekt niet vereenigen met de rede-

neering, waaruit MELSENS besluit [1]) dat de *hoogte* eener stang van weinig belang zou zijn; al willen wij niet beweren dat er een beschermingskegel *met bepaalden tophoek* bestaat, toch zijn wij van oordeel dat eene vangstang de omgeving eenigszins beschut en wel des te meer, naarmate zij hooger is. Wij meenen dus dat men niet moet afwijken van het oude gebruik om verticale stangen van zekere hoogte op te richten. Het aantal daarvan kan kleiner dan 21 zijn; het zal echter eerst na plaatselijk onderzoek kunnen worden vastgesteld.

De op het dak uitgespannen draadgeleidingen wenschen wij te behouden en de vraag is nu alleen of men daarop, behalve de bovengenoemde hooge vangstangen, ook nog hier en daar „aigrettes" zal plaatsen. MELSENS doet dit omdat hij meent dat de uitstrooming der electriciteit uit een groot aantal spitsen in vele gevallen een bliksemslag zal voorkomen. O. i. is voor deze meening — al is zij niet geheel onbetwistbaar — wel zooveel te zeggen dat het verstandig mag heeten, behalve de gewone kegelvormige spitsen der vangstangen, nog een vrij groot aantal punten, over een groot oppervlak verdeeld, aan te brengen. Maar hiertoe bestaan eenvoudiger middelen dan de aigrettes. Het minst kostbaar zal wel zijn het door LODGE [2]) aanbevolen gebruik van gegalvaniseerden stekeldraad, zooals die veelal voor omheiningen wordt gebezigd. Het komt ons doelmatig en voldoende voor, de langs de nokken uitgespannen draden met een dergelijken stekeldraad te omwikkelen, liefst zoo, dat de punten daarvan naar boven gekeerd zijn. Bezwaren hiertegen zien wij niet, althans bij een gebouw als het Mauritshuis, waar niet aan brandbaar stof op de daken behoeft gedacht te worden.

c. Het materiaal der afleiders. De meeningen zijn nog altijd verdeeld over de vraag of men ijzer of koper moet kiezen. Wij zijn van oordeel dat beide metalen, bij geschikt gekozen doorsneden, geheel gelijk zouden staan, indien niet het ijzer bij eene ontlading meer onderhevig was aan eene oppervlakkige verbranding, gepaard met vonkenspatten. Dit laatste levert wel is waar aan de buitenzijde van een gebouw weinig gevaar op, en men zal dan ook dikwijls met gerustheid ijzer durven aanbevelen, maar het is mogelijk

---

[1]) MELSENS, Des paratonnerres à pointes, à conducteurs et raccordements terrestres multiples, p. p. 137—141.

[2]) LODGE, Lightning conductors and lightning guards, p. 24.

dat men bij het Mauritshuis zelfs dit geringe gevaar wil voorkomen. Dan zou men niet, zooals het voornemen is, ijzer, maar koper moeten nemen.

Wij willen ook nog opmerken dat de eerste ontlading die een gegalvaniseerden ijzerdraad treft, waarschijnlijk het zink zal doen verdwijnen, te meer omdat snel verloopende electrische stroomen tot een dun laagje van de oppervlakte beperkt blijven. Of de draad daarna niet al te spoedig zal doorroesten, moeten wij aan het oordeel der bouwkundigen overlaten, maar in elk geval zien wij in de genoemde omstandigheid eene reden te meer om op een geregeld zorgvuldig onderzoek der afleiders aan te dringen.

d. De dikte der afleiders. Bij de beoordeeling van dit punt zijn wij uitgegaan van de onderstelling dat bij een bliksemslag minstens 2 afleiders in werking zullen treden. De gezamenlijke doorsnede daarvan zou dan, als men ijzer gebruikt, volgens de verschillende voorschriften die van de Akademie van Wetenschappen te Parijs zijn uitgegaan van 225 tot 480 m.M^2. moeten bedragen, volgens de regels die eene commissie uit de Electrotechnische Vereeniging te Berlijn heeft gegeven, minstens 95 m.M^2., en volgens de Engelsche Lightning Rod Conference minstens 410 m.M^2.

Stelt men, zooals blijkens het bestek en de teekening het plan is, elken afleider samen uit een drietal ijzerdraden van 8 m.M. middellijn, dan wordt de doorsnede van elken afleider 150 m.M^2., die van twee afleiders 300 m.M^2.

Wij geven echter in overweging, liever draden van 9 m.M. middellijn te gebruiken; de doorsnede van één afleider wordt dan 190 m.M^2., het dubbel 380 m.M^2.

Beter dan door vergelijking met de bovenstaande zoo uiteenloopende voorschriften kan men over de waarde van afleiders van deze dikte een oordeel verkrijgen door de volgende overwegingen:

1^0. Herhaaldelijk, ofschoon betrekkelijk zelden, zijn ijzeren telegraafdraden van ruim 4 m.M. dikte gesmolten [1]) en men vindt bij Arago [2]) het verhaal van de geheele smelting van een ijzeren ketting, bestaande uit draden van 45 c.M. lengte en 6 m.M. dikte, die aan de uiteinden tot oogen waren omgebogen en door ringen met

[1]) Volgens mededeelingen van Preece in „Report of the Lightning Rod Conference", p. 101.

[2]) Arago, Oeuvres complètes, T. IV, p. 103.

elkander waren verbonden. Wij kennen intusschen geen enkel vertrouwbaar bericht van dikkere draden die gesmolten zouden zijn. In vergelijking met de doorsnede van een draad van 6 m.M. middellijn, nl. 28 m.M^2., zou de bovengenoemde gezamenlijke doorsnede van 2 afleiders een veiligheidscoefficient 13,5 opleveren [1]).

2^0. Het is gebleken dat ijzerdraden van 12 en 13 m.M. middellijn (doorsnede 113 en 132 m.M^2.) den bliksem hebben afgeleid, zonder dat zij daarna een spoor van smelting vertoonden [2]). Sommige waarnemers meenen evenwel te hebben mogen besluiten dat eene staaf van 12 m.M. dikte (doorsnede 144 m.M^2.) roodgloeiend was geworden [3]). Vergelijkt men hiermede de door ons wenschelijk geachte afleiders, dan komt men, wat het gloeien betreft, tot een veiligheidscoefficient (uit de doorsnede berekend) 2,5.

Ter vergelijking moge nog dienen, dat Melsens op het Stadhuis te Brussel 8 afleiders, elk uit één ijzerdraad van 10 m.M. dikte, heeft aangebracht. Deze draden zijn gelijkmatig langs den omtrek van den toren verdeeld, maar worden, als zij lager dalen, tot één bundel vereenigd. Het was Melsens hoofdzakelijk om de bescherming van den toren te doen, en daarbij is de gezamenlijke doorsnede van alle afleiders, nl. 628 m.M.^{2}, werkzaam, daar het geen twijfel lijdt dat eene ontlading, die den toren treft, zich over alle draden zal verdeelen.

Daar het volgens de nieuwere onderzoekingen van gewicht is, dat een afleider een zoo klein mogelijken coefficient van zelfinductie hebbe, geven wij in overweging, de draden die naast elkander worden geplaatst niet minder dan 2 c.M. van elkander verwijderd te houden.

e. Het aantal der afleiders. Blijkens het bestek zal dit 4 zijn, nabij elken hoek één, de onderlinge afstand zal 20 à 25 M. bedragen. Zal onder deze omstandigheden eene ontlading zich altijd over twee afleiders verdeelen? En zal het onmogelijk zijn dat de bliksem, van de draden op het dak af, een anderen weg, tusschen twee afleiders in, naar den grond zoekt? Ziet daar vragen, die wij volstrekt niet met zekerheid kunnen beantwoorden. Gold het een gebouw van minder waarde, dan zouden wij durven voorstellen, het met 4

---

[1]) Wil men liever den veiligheidscoefficient niet uit de oppervlakte, maar uit den omtrek der doorsnede berekenen, dan komt men tot het getal 9.

[2]) Arago, l. c., p.p. 107 en 108.

[3]) Arago, l. c., p. 107.

fleiders te wagen; met het oog echter op de schatten in het Mauritshuis meenen wij een grooter aantal afleiders te moeten aanraden. Wordt het op 6 of 8 gebracht, nader te bepalen in verband met de plaatsing der vangstangen en de geheele inrichting van het gebouw, dan is er o. i. gedaan, wat redelijkerwijze kan verlangd worden.

f. De geleidingen op het dak. Tegen de distributie hiervan hebben wij — voor zoover wij er over kunnen oordeelen — geen bezwaar, wel echter tegen het aantal, of, zoo men wil, tegen de dikte. Wij wenschen er, evenals bij de verticale afleiders, ook hier op bedacht te zijn, dat *twee* dezer wegen den geheelen stroom hebben weg te voeren. Derhalve moeten deze geleidingen eveneens elk uit 3 draden van 9 m.M. dikte — onverminderd den op de nokken om één daarvan gewikkelden stekeldraad — bestaan.

g. De dikte van koperen geleiders, zoo deze gekozen mochten worden. Men is gewoon, aan koperen afleiders, wegens den kleineren soortelijken weerstand, eene mindere dikte te geven dan aan ijzeren, maar de verhouding der doorsneden is moeilijk uit de eigenschappen der metalen af te leiden. Gemakkelijk genoeg kan men berekenen, welke draden door denzelfden standvastigen electrischen stroom in denzelfden tijd gesmolten (of tot het smeltpunt verhit) kunnen worden. Maar bij den bliksem verloopt de electriciteitsbeweging uiterst snel en is misschien oscilleerend; men mag niet aannemen dat in afleiders van verschillende metalen, die onder gelijke omstandigheden getroffen worden, de stroomsterkte, die de warmteontwikkeling bepaalt, gemiddeld dezelfde is.

Voegt men hierbij dat alleen eene oppervlaktelaag in het spel is, waarvan de dikte, wat het ijzer betreft, van de magnetiseerbaarheid afhangt, en dat deze laatste voor het geval van den bliksem hoogst moeilijk in rekening is te brengen, dan is het wel duidelijk dat eene theoretische berekening weinig vertrouwen zou verdienen. Men moet weder van de ervaring uitgaan.

De Lightning Rod Conference heeft als minimum-dikte voor koper voorgeschreven 65 m.M^2, de commissie uit de Electrotechnische Vereeniging te Berlijn 50 à 60 m.M^2. Het komt ons voor dat de uit drie ijzerdraden bestaande geleidingen waarvan boven gesproken is met gerustheid door koperen kabels met eene doorsnede van 65 m.M^2 kunnen worden vervangen.

Het kan vreemd schijnen dat wij hier niet tot de helft dalen, daar wij hebben aangenomen dat *twee* geleiders werkzaam zullen zijn. De reden is gelegen in de wijze waarop de Lightning Rod

Conference tot de genoemde doorsnede van 65 m.M^2 is gekomen. Zij is uitgegaan van het feit [1]) dat wel eens koper van deze dikte is gesmolten, en heeft dan verder in 't geheel geen veiligheidscoefficient ingevoerd. Door nu *elken* afleider de doorsnede van 65 m.M^2 te geven, zou men, altijd in de onderstelling dat twee geleiders de ontlading afvoeren, ten minste een veiligheidscoefficient 2 verkrijgen. Dat wij niet nog verder wenschen te gaan, ten einde tot een veiligheidscoefficient te komen, even groot als bij het ijzer, heeft zijn grond in de ervaring van de laatste jaren dat koperen kabels van de genoemde afmetingen goed voldoen. Wij hechten — met het oog op het verschil in de hoeveelheden arbeidsvermogen, die de eene of de andere maal bij de ontlading vrij worden — aan deze ondervinding meer gewicht dan aan de waarneming over een gesmolten koperdraad, die de Lightning Rod Conference tot basis voor hare voorschriften heeft gekozen.

h. De verbinding met de aarde. Bij gemis aan gegevens kunnen wij hierover geen oordeel uitspreken.

i. Groote metaalmassa's in of aan het gebouw. De vraag, in hoeverre, en op welke wijze, deze massa's (metalen kapbedekkingen, gas- en waterleidingsbuizen) met de afleiders verbonden moeten worden, is van groot gewicht en vereischt, vooral wat de gasleiding betreft, ernstige overweging, wegens het gevaar voor gasontbranding. Daar er in het bestek slechts met een enkel woord over gesproken wordt, meenen wij ons thans van nadere beschouwingen hieromtrent te mogen onthouden, in het vertrouwen dat het plan eerst na plaatselijk onderzoek door een ervaren deskundige zal worden vastgesteld.

Wij hebben de eer, de Afdeeling voor te stellen, een afschrift van dit rapport als antwoord op de in den aanhef genoemde vraag aan den Minister van Binnenlandsche Zaken te zenden. Tevens wenschen wij mede te deelen dat uit den aard der zaak bij onze besprekingen de vraag rees, door welke maatregelen er in het vervolg het best voor zal kunnen worden gewaakt dat de wijze van aanleg en onderzoek der bliksemafleiders op de Rijksgebouwen in overeenstemming blijve met de vorderingen der wetenschap. Wij stellen ons voor, op dit onderwerp te gelegener tijd terug te komen.

De voorstellen, in bovenstaand rapport vervat en breedvoerig toegelicht,

[1]) Report of the Lightning Rod Conference, p. 6.

120° 80° 40° Greenw. 40° 80° 120° 160°

160° 120° 80° 40° Greenw. 40° 80° 120° 160°

inien gleicher Säkular-Variation der Declination.

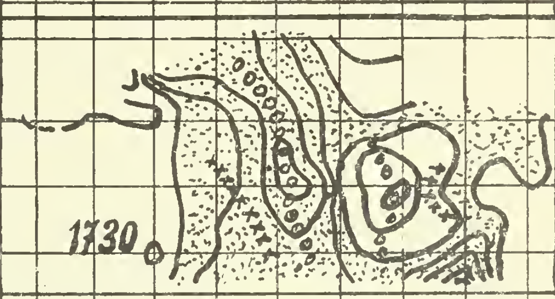
ie Linien sind gezogen von 5'-5' jährl. Variat.
ebiete westlicher Variation sind dunkel.
xxx Agone. ooooo Kammlinie.
Secund. Pol nach den Isapoclinen von Bauer.

1680

1540

1700

1580



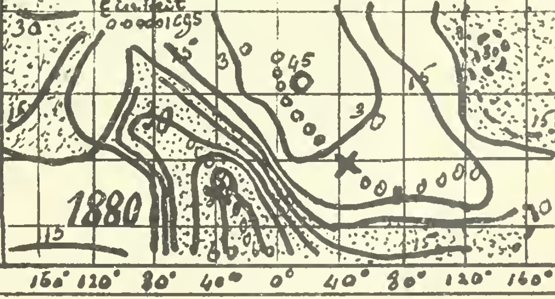
1610



1640



1665



160° 120° 80° 40° 0° 40° 80° 120° 160°

160° 120° 80° 40° 0° 40° 80° 120° 160°

W. van Bemmelen del.

worden goedgekeurd, en de Secretaris belast Z.Exc. een afschrift van het rapport te doen toekomen.

— De Voorzitter deelt mede, dat de Commissie, aan welke in de October-vergadering werd opgedragen, de Afdeeling voor te lichten omtrent het aan den Minister van Binnenlandsche Zaken te geven antwoord op de vraag (missive van 3 October 1895) omtrent het zenden van een vertegenwoordiger der Regeering naar eene, in Juli 1896, op initiatief der Royal Society te Londen, beraamde internationale conferentie, ter bespreking van de mogelijkheid en wenschelijkheid om, door samenwerking van geleerden van alle landen, de bewerking van een Catalogus of Index van wetenschappelijke geschriften voor te bereiden, met haar advies gereed is.

Op de vraag naar de wenschelijkheid, een vertegenwoordiger der Regeering naar voornoemde conferentie af te vaardigen, kwam de Commissie tot een bevestigend antwoord. Zij stelt voor den Minister in dien zin te adviseeren. De Vergadering vereenigt zich zonder discussie met dit voorstel.

Alhoewel de Minister der Afdeeling niet opdroeg, hem iemand aan te wijzen, die, ingeval tot het zenden van een Regeerings-afgevaardigde werd besloten, als zoodanig zou kunnen worden aanbevolen, achtte de Commissie het toch zeer waarschijnlijk, dat deze bedoeling in de door Z.E. gestelde vraag lag opgesloten, en achtte zij zich dus ook geroepen, dit tweede punt in behandeling te nemen. Ook hieromtrent kwam de Commissie tot een besluit. De Voorzitter is bereid dit laatste meê te deelen, indien de Vergadering met de Commissie van oordeel is, dat het op haren weg lag, de vraag des Ministers in ruimeren zin op te vatten. Daar niemand tegen deze opvatting bezwaar heeft, deelt de Voorzitter mede, dat de Commissie hare keuze op het Lid der Afdeeling Korteweg heeft doen vallen, en dat deze niet ongeneigd zou zijn, de opdracht te aanvaarden, indien zij hem mocht worden aangeboden. De Heer Korteweg heeft bij verschillende gelegenheden getoond met bibliografische aangelegenheden grondig vertrouwd te zijn, en kan dus in het gegevene geval met zijne kennis tot het welslagen der saam te roepen conferentie zeer veel bijdragen en de Nederlandsche belangen behartigen. De Vergadering vereenigt zich onder applaus met de gedane keuze, waarna de Heer Korteweg verklaart zich deze te laten welgevallen, maar daarbij hoopt, op de welwillendheid zijner medeleden te mogen rekenen.

Van een en ander zal aan den Minister spoedig kennis gegeven en daarbij verzocht worden, de benoeming zoo mogelijk spoedig te doen volgen.

Physiologie. — De Heeren PLACE en KAMERLINGH ONNES brengen het volgende verslag uit over de verhandeling van den Heer Dr. W. KOSTER GZN.: „*Over eene methode ter bepaling van het draaipunt van het oog*".

In de vergadering van 26 October j.l. werd ons de verhandeling van den Heer Dr. W. KOSTER GZN., getiteld: „Eene methode ter bepaling van het draaipunt van het oog", en aangeboden ter opneming in de werken der Akademie, ter hand gesteld met het verzoek om daarop te dienen van advies.

Wij hebben de eer omtrent die verhandeling het volgende te rapporteeren.

Dr. KOSTER gaat uit van de stelling, dat het draaipunt des te verder naar achteren moet liggen, hoe grooter, bij draaiing van het oog, de loodrechte afstand wordt van de visierlijn tot aan een bepaald punt vóór het oog gelegen.

Om de grootte van dien afstand te bepalen heeft Dr. KOSTER een toestel laten maken, dat door middel van een inbijtstuk onbeweeglijk aan het hoofd kan worden bevestigd en waarop zich een buisje met een tweetal kruisdraden als visieren bevindt. De graad van draaiing van dit buisje — dus van de visierlijn — kan, evenals de grootte der verschuiving, nauwkeurig worden afgelezen.

De schrijver ontwikkelt de formules die aangeven: 1° den afstand van het te zoeken draaipunt tot aan den top der cornea en 2° den afstand van het draaipunt tot de visierlijn.

De bepalingen, die de schrijver op zijn eigen oogen verricht heeft, leidden tot de uitkomst, dat er van geen vast en onveranderlijk draaipunt sprake kan zijn. Zelfs bij draaiing in een zelfde vlak, werd, bij verschillende draaiingshoeken, reeds een groot verschil in de ligging van het draaipunt gevonden.

Uit de medegedeelde resultaten blijkt niet in hoeverre de verschillende waarnemingsreeksen bij een zelfde oog overeenkomen of van elkander afwijken; de gegevens ontbreken dus om de gemiddelde fout te beoordeelen. De schrijver opent echter het uitzicht op voortzetting van zijn onderzoek en dan zal het wenschelijk zijn, dat niet alleen mededeeling wordt gedaan van nieuwe bepalingen omtrent de ligging van het draaipunt bij verschillende oogen en bij draaiing in verschillende blikvlakken, maar ook van herhaalde bepalingen op één en hetzelfde oog, opdat daaruit de te verkrijgen graad van zekerheid duidelijk blijke.

Het toestel heeft dit voordeel, dat het bepalingen in elk wille-

keurig vlak van draaiing toelaat. Het beginsel waarvan het onderzoek uitgaat is juist en eenvoudig.

Wij aarzelen daarom niet aan de Afdeeling voor te stellen de verhandeling van Dr. W. KOSTER GZN. in hare werken op te nemen.

Amsterdam, 30 November 1895.

T. PLACE.
H. KAMERLINGH ONNES.

De conclusie van het rapport wordt goedgekeurd.

Physiologie. — De Heer TH. W. ENGELMANN handelt: *Over den invloed der contractie op het physiologisch geleidingsvermogen der hartkamerspier en de verklaring der verschijnselen van allorhythmie.*"

In de norm trekken de hartkamers zich bij iedere systole op alle plaatsen nagenoeg gelijktijdig en even sterk samen, doordat de prikkel, in regelmatige intervallen van de voorkamer komende, zich met groote snelheid en onverzwakt door de geheele spiermassa der kamers voortplant. Onder abnorme voorwaarden — ophouden of belemmering van den bloedstroom, plaatselijke mechanische beleediging van den hartswand, dyspnoe, invloed van vergiften — kunnen de contracties ongelijk in grootte worden, doordat het hart zich òf op alle plaatsen, òf op enkelen dan eens meer dan eens minder sterk of in 't geheel niet samentrekt. De pols vertoont in die gevallen de verschijnselen van zoogenaamde allorhythmie of arhythmie, waarvan verschillende vormen als pulsus alternans, intermittens, myurus, bigeminus enz. door de geneeskundigen worden onderscheiden.

Uit een theoretisch oogpunt bijzonder belangwekkend zijn die afwijkingen, waarbij in de norm samenwerkende deelen der spiermassa der kamers meer of minder zelfstandig kloppen, zooals bij de hemisystolie, waar afwisselend éene kamer en beide kamers zich samentrekken, of althans de éene (meestal de linker) zich dan eens sterker, dan eens zwakker contraheert. Verschijnselen van dergelijke „incongruentie", eerst door SKODA bij klinisch onderzoek waargenomen, door A. VON BEZOLD bij konijnen kunstmatig voortgebracht en nader onderzocht, werden aanvankelijk veel betwijfeld of zelfs voor onmogelijk verklaard, later door physiologen en pathologen veelvuldig geconstateerd en onlangs vooral door PH. KNOLL grondig bestudeerd.

Terwijl een voldoende verklaring dier verschijnselen nog niet is gegeven, schijnen ze een gewichtig argument te vormen tegen de

theorie van spr., volgens welke de normale systole van het hart op voortgeleiding van den prikkel rechtstreeks van spiercel tot spiercel berust. Aangezien de spiermassa van beide kamers één samenhangend geheel vormt, de spiercellen van beide op tallooze plaatsen met elkander organisch samenhangen, op dezelfde wijze als binnen den wand van iedere afzonderlijke kamer, schijnt er geen grond te bestaan, waarom de contractiegolf niet altijd even goed van de eene op de andere kamer, als binnen dezelfde kamer van spiercel tot spiercel zoude kunnen voortschrijden.

In de vergadering der afd. Natuurkunde der K. Akad. v. Wet. van 25 Mei 1895 heeft spr. reeds één tot dusverre niet bekend moment aangewezen, waardoor ook op het standpunt van zijne theorie, verschijnselen van hemisystole en allorhythmie of incongruentie verklaring zouden kunnen vinden: de verandering, nl. onder abnorme omstandigheden, van het normale reciproke in een irreciprook geleidingsvermogen der spiervezelen. Heden wenscht spr. op een anderen, eveneens nog niet gewaardeerden, factor te wijzen, die tot verschijnselen van hemisystole enz. aanleiding kan en moet geven: de invloed der contractie op het geleidingsvermogen der spierzelfstandigheid van het hart.

Uit vroegere onderzoekingen is bekend, dat in gladde spieren (ureter, darm) het geleidingsvermogen door de contractie zelve tijdelijk opgeheven wordt en slechts allengs terugkeert. De vermindering uit zich niet alleen in eene daling der snelheid van voortplanting, maar ook in het zwakker worden der contractie gedurende het voortschrijden, ten gevolge waarvan de verkorting op grooteren of kleineren afstand van het uitgangspunt geheel verdwijnt. Ook bij gewone dwarsgestreepte spieren en bij zenuwen was het door proeven met snel opeenvolgende electrische prikkels gebleken, dat een nieuwe irritatiegolf eerst na eenigen rusttijd wederom van de direct geprikkelde plaats kan uitgaan, welke rusttijd voor gewone spieren zeer veel korter dan voor gladde, voor zenuwen wederom zeer veel korter is dan voor gewone spieren. In deze feiten lag o. a. de verklaring van de zoogenaamde „Anfangszuckung". Ook de geleiding van den motorischen prikkel van voorkamer op kamer en omgekeerd wordt door de contractie bemoeilijkt: het interval A_s—V_s bleek met afnemenden duur der periode van prikkeling langer te worden, totdat beneden een zekeren duur der pauze na een eersten werkzamen prikkel de tweede contractie zich in 't geheel niet meer naar de andere hartsafdeeling kon voortplanten. Eerst de derde en de vierde of een nog latere prikkel vindt het geleidingsvermogen weder genoegzaam hersteld, om de atrioventrieulairgrens te kunnen overschrijden.

Hieruit konden de bekende verschijnselen van allorhythmie worden verklaard, bij afstervende harten geregeld voorkomende en daarin bestaande, dat niet op iedere A_s ook een V_s volgt, maar slechts op de tweede of derde enz. (wet der multiple perioden).

Geheel hetzelfde geldt nu volgens tijdmetende proeven, in de laatste jaren door spr. op kikvorsch-harten genomen, ten opzichte van de motorische geleiding binnen het spierweefsel van den kamerwand.

De proeven werden op de volgende wijze genomen. De afgesneden kamerpunt van een groot kikvorschhart wordt overlangs in twee helften gesneden die — aan de basis of aan de punt — nog door een spierbrug van ongeveer 2 mM. dikte samenhangen. Het vrije einde van de éene, in sommige proeven ook van de andere kamerhelft wordt aan een licht hefboompje gesuspendeerd, dat de contracties 8 of meermalen vergroot op den, met een snelheid van ongeveer 20—40 mM. draaienden cilinder van het pantokymographion opschrijft. Een stemvork van 10 of 25 trillingen in 1″ registreert den tijd, een electromagneet het moment van prikkeling. Na het preparaat eenige rust te hebben gegund, wordt in constante of variable intervallen door een openingsinductieslag de éene helft op zoo groot mogelijken afstand van de andere helft (meestal 4—6 mM.) geprikkeld. De spierbrug, die beide helften verbindt, blijft gedurende de proef door een met bloed bevochtigden wollen draad zacht tegen een vaste kurken plaat aangedrukt, op zoodanige wijze, dat de contractie der eene kamerhelft niet rechtstreeks op het hefboompje der andere werken kan, maar wel de prikkelingsgolf door de spierbrug heen zich kan voortplanten.

De uitkomsten zijn in hoofdzaak de volgende:

De indirect geprikkelde kamerhelft trekt zich steeds later dan de direct geprikkelde samen, des te later op hoe grooteren afstand van de eerste de laatste geprikkeld wordt. Het stadium van indirecte latente prikkeling λ' bereikt, bij constante plaats en sterkte van prikkel, een minimum, wanneer de duur τ der voorafgaande periode van prikkeling een zekere maximale waarde overschrijdt. Deze maximale waarde is voor geheel versche preparaten klein, meestal niet meer dan $1^1/_2$—2 seconden, maar kan later tot 10 seconden en hooger klimmen.

Beneden de genoemde maximale waarde van τ klimt de latentieduur λ' met afnemenden τ. Onmiddellijk na iedere systole is het geleidingsvermogen volkomen opgeheven.

Bij langer voortgezette prikkeling in *constante* intervallen van 2 of meer seconden, volgende op een lange pauze, klimt λ' van het aanvankelijke minimum met iederen nieuwen prikkel hooger, soms tot

op meer dan het dubbele; eindelijk blijft er plotseling een contractie uit en eerst de volgende prikkel wekt weder een contractiegolf op, die de andere kamerhelft bereikt. Hier wordt dan wegens den nu voorafgaanden dubbelen rusttijd, λ' terstond weder veel kleiner gevonden.

Kiest men de intervallen van prikkeling een weinig langer, zoodat elke prikkel een doorloopende contractiegolf geeft, dan klimt λ' allengs tot op een maximum, waarop het zich bij voortgezette prikkeling staande houdt. Dit maximum nadert des te meer het minimum, hoe langer de intervallen tusschen de enkele prikkels zijn.

Het kan, bij niet te korten duur der intervallen na een lange periode van rust ook gebeuren, dat λ' na de tweede of derde prikkel nog iets vermindert, of althans niet, of nauwelijks klimt om eerst bij de daarop volgende contracties duidelijk te rijzen. Deze schijnbare uitzondering vindt hare verklaring in de wijziging van den duur van het stadium van latente *directe* prikkeling. Naar spreker vroeger heeft medegedeeld en door hem telkens op nieuw bevestigd werd gevonden, is dit stadium na een lange rustpauze in 't algemeen een maximum en neemt dan bij herhaalde prikkeling in korte pauzen aanvankelijk af. De verschillen kunnen 0.05" en meer bedragen, voldoende om den tegenovergestelden invloed der contractie op het geleidingsvermogen aanvankelijk te compenseeren of zelfs schijnbaar in zijn tegendeel te veranderen. Het bewijs, dat door de contractiegolf het geleidend vermogen in de kamerspier tijdelijk verzwakt wordt, is dus a fortiori geleverd [1]).

Ook het geleidingsvermogen der voorkamers wordt door de contractiegolf tijdelijk opgeheven en herstelt slechts allengs, hoewel in 't algemeen spoediger dan dat der kamers.

De toepassing dezer uitkomsten op de verklaring van allorhythmische verschijnselen, zooals b.v. hemisystolie, ligt voor de hand. Deze verschijnselen moeten kunnen ontstaan, wanneer het geleidingsvermogen niet in alle deelen der hartspiermassa even spoedig en even volkomen na afloop der contractie terugkeert. Dat iets dergelijks onder abnorme voorwaarden voorkomt, kan niet betwijfeld worden.

De feitelijk bestaande verschillen in dimensies, in ligging, in drukking of spanning, in samenstelling, hoeveelheid en wisseling van het bloedgehalte van rechter en linker-kamer of kamerhelft moeten, even-

---

[1]) Buitendien ligt daarin een nieuw bewijs voor de onafhankelijkheid van contractieproces en geleiding aan elkander.

als tot andere physiologische verschillen, ook tot belangrijke verschillen in het geleidingsvermogen der spiervezelen aanleiding geven, ook al mochten er in de norm — hetgeen niet het geval is — allen physiologisch volkomen identiek zijn. Feitelijk weet men dan ook sedert van ouds, dat de linker kamer in den regel vroeger hare prikkelbaarheid verliest dan de rechter; dat die der kamers vroeger dan die der voorkamers en die der linker voorkamer vroeger dan die der rechter, die van het rechter hartsoor later dan die der overige rechter voorkamer pleegt te verdwijnen. Treft dus na een eersten prikkel een tweede het hart, op het oogenblik, waarin het geleidingsvermogen in de rechter kamer of kamerhelft wel, in de linker nog niet of niet volkomen hersteld is, dan zal er slechts een particeele contractie der kamerspiermassa plaats grijpen, en wel uitsluitend of voornamelijk een systole van de rechter kamer. Eerst bij een derden, eventueel een vierden, of nog lateren prikkel zal ook de linker kamer resp. kamerhelft weder aan de systole deelnemen.

Op die wijze kunnen pulsus alternans en daarmede verwante verschijnselen verklaard worden, vooral ook in gevallen waarin de duur der hartperioden constant is. Men mag verwachten, dat in dergelijke gevallen verlenging van den duur der hartsperioden, m. a. w. vertraging der polsfrequentie de hemisystolie zal doen verdwijnen. Spreker heeft dit dan ook herhaaldelijk geconstateerd. Hij zag pulsus alternans meestal bij relatief d. i. in verhouding tot de omstandigheden hooge polsfrequentie. Waar de polsfrequentie allengs spontaan verminderde, nam ook het verschil in grootte der beide contracties allengs af, doordat de kleinere meer en meer den omvang der grootere systole verkreeg. Werden — b.v. door sinus- of vagusprikkeling — de hartsperiodes plotseling verlengd, zoo verdween ook plotseling het verschil in contractiegrootte. Reeds KNOLL [1]) zag bij konijnen na vagusprikkeling eerst vertraging der hartswerking en opheffing der hemisystolie, daarna, bij wederom hoogere frequentie, terugkeer van den pulsus alternans. Verhooging van polsfrequentie kan de ongelijkheid soms ook doen verdwijnen, door verzwakking der eerst grootere systole.

Spreker is volstrekt niet van meening, dat hemisystolie en verwante verschijnselen steeds moeten berusten op plaatselijke verschillen in het geleidingsvermogen van den spierwand van het hart. Ook bij een normaal, overal even voortreffelijk geleidend vermogen zouden nog andere momenten, in de eerste plaats locale verschillen in *con-*

---

[1]) Wien. Sitzungsber. XCIX. 1890, p. 40. Taf. II Fig. 5, IV. Fig. 8

tractiliteit der spiervezelen allorhythmie moeten kunnen veroorzaken. Zulke locale verschillen in contractiliteit zullen zich zeker moeten ontwikkelen onder de abnorme voorwaarden waaronder allorhythmie optreedt. Contractiliteit en geleidingsvermogen zijn verschillende eigenschappen der spieren, binnen ruime grenzen onafhankelijk van elkander. Spreker herinnert slechts aan de opheffing der contractiliteit, zonder verzwakking van 't geleidend vermogen, door inwerking van water of vagusprikkeling.

Door de contractie wordt, evenals het geleidend vermogen, ongetwijfeld ook de contractiliteit der hartspiervezelen tijdelijk verzwakt. Het „refractaire" stadium en het feit, dat de grootte van een „extrasystole" des te kleiner is, hoe spoediger zij een voorafgaande contractie opvolgde, zouden wel is waar uit veranderingen uitsluitend van het geleidend vermogen der spieren kunnen verklaard worden. Maar inspectie van het hart toont toch in vele gevallen, dat het geheele hart aan de verzwakte systole actief deelneemt. En zeer zeker is het trapsgewijze klimmen der grootte van verkorting bij periodieke prikkeling na een lange rust (trap van Bowditch) niet dan door wijziging der contractiliteit te verklaren. Immers uit spreker's proeven bleek, dat de geleidingssnelheid juist na lange rust maximaal pleegt te zijn, om gedurende den „trap" allengs te verminderen.

Herstelt, na een algemeene systole, de contractiliteit in de éene kamer (resp. kamerhelft) zich spoediger dan in de andere, dan zal een tweede spoedig volgende prikkel de eerste helft wel, de tweede niet in contractie brengen, al wordt het prikkelingsproces ook door de tweede heen voortgeleid. De duur van 't interval tusschen de prikkels zal dus ook door tusschenkomst van locaal verschillende wijzigingen der contractiliteit allorhythmie kunnen veroorzaken. Aangezien reeds zeer kleine verschillen in dien duur, evenals op de geleidingssnelheid, ook op de contractiegrootte zeer merkbaren invloed uitoefenen, aangezien verder de locale verschillen in contractiliteit ongetwijfeld naar grootte, en duur veelvuldig kunnen varieeren, moet er ook op deze wijze een groote verscheidenheid van allorhythmische verschijnselen kunnen ontstaan.

Als een tweede factor die — en wel ook bij constanten duur der hartperioden — allorhythmie moet kunnen veroorzaken, komen hierbij nog plaatselijk verschillende veranderingen in de werking der hartverzwakkende en versterkende zenuwen. Op grond van anatomische en physiologische feiten mag men aannemen, dat de verschillende deelen van den hartswand (ook van iedere kamer) niet — of althans niet geheel — door dezelfde vezelen dier zenuwen, maar meer of min zelfstandig worden geïnnerveerd. Om het even, of de werking

dezer vezelen berust op wijziging van het geleidingsvermogen of van de contractiliteit der spiervezelen, of van beiden: zoodra ze in de verschillende deelen van den spierwand ongelijk krachtig beginnen te werken, moet allorhythmie kunnen ontstaan.

Het is evenwel niet waarschijnlijk, dat het regelmatig afwisselen van één grooten met één kleinen hartslag — de typische pulsus alternans — uit dergelijke partieele innervatiestoornis is te verklaren. Bij kikvorschharten althans hebben de schommelingen in de werking der genoemde zenuwvezelen, door momentane kunstmatige prikkeling van vagus, sinus of voorkamer opgewekt, over 't algemeen te langzaam plaats en strekken zich uit over tijdruimten, die geen duidelijke relatie tot den gelijktijdigen duur der hartsperioden schijnen te bezitten. Ook schijnt het niet moeilijk talrijke modificaties van den pulsus alternans alléén uit den rechtstreekschen invloed der systole op het geleidingsvermogen en de contractiliteit voldoende te verklaren. Er komen echter gevallen voor, waar — bij constante polsfrequentie en ook constante grootte der voorkamer-contracties — de kamersystole in langere perioden (van 10, 20 en meer secunden) regelmatig in grootte verminderen en allengs weder toenemen. Ook de grootte van voorkamer-contracties zag spreker soms spontaan gedurende eenigen tijd klimmen en dan plotseling van het maximum op een minimum dalen, van waar ze opnieuw begonnen te rijzen ook hier zonder wijziging der polsfrequentie. Of er kwamen vrij regelmatig afwisselende perioden van allengsche stijging en daling in de grootte der voorkamersystoles, met of zonder duidelijke verandering der polsfrequentie. Deze verschijnselen herhaalden zich soms gedurende vrij langen tijd, waarbij het aantal der tot éene groep behoorende voorkamersystolen allengs groote veranderingen kon ondergaan. Hier schijnt dus een periodieke verandering in den tonus der krachtwijzigende hartzenuwen ter verklaring te moeten worden aangenomen.

Eindelijk dient bij de verklaring van allorhythmische verschijnselen ook de mogelijkheid in 't oog te worden gehouden, dat — tengevolge van de abnorme omstandigheden waaronder de verschillende deelen van het hart zich bevinden — op ongewone plaatsen automatische prikkels in de spierzelfstandigheid ontstaan. De neiging tot automatische periodieke prikkeling der spiervezelen is immers in alle deelen van het hart, ook in de gangliënvrije kamerpunt, aangetoond. Zij kan volgens bekende proeven door velerlei invloeden (verhooging van intracardiale bloedsdrukking, door vergiften, constanten electr. stroom, verwarming) zoo verhoogd worden, dat de spiervezels „spontaan" gaan pulseeren. Deze automatische prikkels zullen

contractiegolven opwekken, die met de golven, van andere plaatsen komende, zullen kunnen interfereeren. Zoodoende moeten contractiliteit en geleidingsvermogen op verschillende plaatsen van den kamerwand gelijktijdig zeer uiteenloopende veranderingen kunnen ondergaan, waardoor een regelmatig samenwerken onmogelijk wordt. Het „flikkeren" van het hart, het „delirium cordis" en andere „coördinatiestoornissen" zullen wel voornamelijk hierin in vele gevallen verklaring moeten vinden.

Ongetwijfeld zullen de verschillende hier achtereenvolgens besproken invloeden zich op verschillende wijze met elkander kunnen combineeren, en het schijnt aldus mogelijk, de tallooze verscheidene gevallen van allorhythmie voldoende te verklaren in overeenstemming met de door spr. verdedigde theorie der hartswerking.

Spr. wijst er ten slotte op, dat de opheffing en vertraging van de geleidingsnelheid der hartspier, door iedere contractie veroorzaakt, een nieuw bewijs levert voor zijn meening, dat de voortplanting van den motorischen prikkel door het hart niet berust op zenuwgeleiding. Zonder met sommige moderne physiologen te willen beweren, dat zenuwvezelen in 't geheel niet vermoeibaar zijn, acht spr. het toch zeker, dat er geen zenuw, althans van vertebraten, door een enkele irritatiegolf gedurende een tiende van een secunde, laat staan een geheele secunde of nog langer van haar geleidingsvermogen kan worden beroofd. De door spr. voor den duur der vermoeienis bij de kamerspier gevonden waarden zijn van dezelfde orde als voor de geleiding tusschen voorkamer en kamer vroeger door hem werden gemeten. Zij leveren dus nog in 't bijzonder een krachtigen steun voor de meening dat ook de voortplanting van den motorischen prikkel van de voorkamer op de kamer en omgekeerd zuiver door spiergeleiding tot stand komt.

De opmerking van den Heer Stokvis dat allorhythmische verschijnselen der hartspier bij zijne patiënten zoo buitengewoon zeldzaam door hem werd waargenomen, wordt door den spreker toegelicht.

Physiologie. — De Heer Engelmann spreekt *„over een middel om extrapolaire prikkeling van spieren en zenuwen onmogelyk te maken"*.

In vele physiologische proeven is strenge localisatie der electrische prikkeling een volstrekt vereischte. Die localisatie wordt — vooral bij gebruik van stroomen van hooge spanning zooals inductiestroomen —

bemoeilijkt door unipolaire ontladingen of zijdelingsche uitbreiding van stroomtakken, in 't algemeen door extrapolaire uitbreiding der electriciteit, welke prikkeling van extrapolair gelegen deelen ten gevolge kan hebben. Ter voorkoming van dit bezwaar heeft men verschillende wegen ingeslagen. Prof. PLACE en Spr. hebben ter voorkoming van unipolaire effecten bij inductiestroomen (1868) aanbevolen: afleiding der onderste electrode naar de aarde (door middel van gas- of waterleiding). HERING construeerde een „Schutzelectrode'', door de beide electroden van den prikkelenden stroom te plaatsen tusschen twee, door een korten metallischen boog met elkander verbonden en aan een geïsoleerd staafje bevestigde draadelectroden. Beide middelen — vooral dat van HERING — hebben het nadeel dat ze den stroom in de extrapolaire streek belangrijk verzwakken. Ze geven ook alleen bij niet zeer groote stroomsterkte voldoende veiligheid.

Ook de methode van zoogenaamde unipolaire prikkeling, door CHAUVEAU ingevoerd, veroorlooft slechts bij zwakke stroomen nauwkeurige localisatie.

Een eenvoudig en zeer afdoend middel om extrapolaire prikkeling ook bij uiterst sterken stroom te beletten, zonder verzwakking van het effect in de extrapolaire streek, bestaat volgens spr. daarin, *dat men de stroomdichtheid extrapolair zeer klein maakt*, door hier aan de stroombaan een zeer groote dwarse doorsnede te geven. Spr. plaats te dien einde dikke, met physiologische keukenzoutsolutie gedrenkte stukken watten of zeemleder ter zijde van de electroden op het preparaat, of omhult — bij een geïsoleerde zenuw of spier — de extrapolaire stukken er mede tot dicht bij de electroden. Spr. heeft van dit middel reeds met goed gevolg gebruik gemaakt, om de theoretisch belangrijke vraag te beantwoorden, of de snelheid van voortplanting van den prikkel langs de dwarsgestreepte spiervezelen een functie is van de sterkte der prikkeling. Dr. WOLTERING is in zijn laboratorium bezig diezelfde vraag ook voor de zenuwen te beantwoorden. Spr. hoopt later methode en resultaten hier uitvoeriger te bespreken. Heden wenscht hij slechts kort mede te deelen, dat in den gecurariseerden Sartorius van Rana maximale contracties met dezelfde snelheid (meestal $1^1/_2$—3 meters in 1'') door de spiervezelen voortschrijden, als 10, 20 of nog vele malen kleinere verkortingen. Deze uitkomst is van gewicht, omdat zij een nieuw bewijs bevat voor de onafhankelijkheid van geleidingsvermogen en contractiliteit. Zij is begrijpelijk, wanneer men bij de geleiding niet het contractieproces als prikkel voor de aangrenzende spierdeeltjes opvat, maar het proces, waarvan de electriciteitsontwikkeling het symptoom

is. Het gaat vooraf aan de contractie en volgt steeds in onmeetbaar korten tijd op de inwerking van den electrischen prikkel, terwijl het contractieproces steeds een merkbaar stadium van latente werking heeft, dat buitendien met afnemende sterkte van den prikkel zeer belangrijk grooter wordt.

Door de Heeren PLACE en VAN DER WAALS worden over enkele punten nadere inlichtingen gevraagd, en door den Spreker gegeven.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ bespreekt: „*het theorema van* POYNTING *over de energie in het electromagnetisch veld en een paar algemeene stellingen over de voortplanting van het licht*".

In 1883 heeft POYNTING [1]) eene tegenwoordig algemeen bekende beschouwing ontwikkeld, volgens welke overal in het electromagnetisch veld een energiestroom bestaat, die in richting en grootte (per vlakte-eenheid en tijdseenheid) bepaald wordt door het vector-product van de electrische en de magnetische kracht, gedeeld door 4 π. Eene meer algemeene stelling, waarin die van POYNTING als een bijzonder geval begrepen is, heb ik bij VOLTERRA [2]) gevonden. Het is deze algemeene stelling, die ik als uitgangspunt voor eenige beschouwingen wensch te kiezen.

§ 1. Schrijft men de grondvergelijkingen der theorie van MAXWELL in den eenvoudigen vorm die daaraan door HEAVISIDE en HERTZ werd gegeven, dan bevatten zij de volgende vectoren: de *electrische stroom* $\mathfrak{S}$, de *electrische kracht* $\mathfrak{E}$, de *magnetische kracht* $\mathfrak{H}$ en de *magnetische inductie* $\mathfrak{B}$; bovendien, wanneer men met dielectrica te doen heeft, de *dielectrische polarisatie* $\mathfrak{D}$.

Het verband tusschen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ en dat tusschen $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{S}$, of — in dielectrica — tusschen $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{D}$, is van den aard der stof afhankelijk. De overige vergelijkingen daarentegen, zoowel die, welke in het binnenste van een zelfde lichaam, als die, welke aan de grens van twee media gelden, zijn onder alle omstandigheden dezelfde.

Ten einde niet alleen het verloop van reeds opgewekte electriciteitsbewegingen, maar ook het ontstaan daarvan in de vergelijkingen uit te drukken, kan men aannemen dat hier of daar uitwendige

---

1) POYNTING, Phil. Trans. London. Vol. 175, p. 343.

2) VOLTERRA, Acta Mathematica. Deel 16, p. 189.

electromotorische krachten werken. Eene dergelijke kracht zal door E worden voorgesteld. Met de bewering dat zij bestaat, wordt in den grond der zaak niet anders bedoeld, dan dat de stroom $\mathfrak{S}$ — of de dielectrische verplaatsing $\mathfrak{D}$ — op dezelfde wijze met den vector $\mathfrak{E} + \mathrm{E}$ samenhangt, als anders met $\mathfrak{E}$ alleen.

Men kan zich voorstellen dat op die plaatsen waar eene electromotorische kracht werkt, overigens aan de eigenschappen der stof niets wordt veranderd, en dus aannemen dat, met uitzondering van het verband tusschen $\mathfrak{S}$ (of $\mathfrak{D}$) en $\mathfrak{E}$ de grondvergelijkingen den gewonen vorm behouden.

Wij zullen voorts nog onderstellen dat de vector E doorloopend van punt tot punt verandert, dat hij dus ook, zoo hij tot eene begrensde ruimte beperkt is, aan de grens daarvan geleidelijk tot 0 overgaat. Dit ter vermijding van mathematische complicaties.

§ 2. Wij beschouwen een willekeurig stelsel van geleidende of dielectrische, isotrope of anisotrope lichamen, aan alle zijden tot op oneindigen afstand door den aether omringd; daarbij sluiten wij echter de magnetische draaiing van het polarisatievlak, en de daarmede in verband staande verschijnselen van Hall en Kerr, alsmede de fluorescentie uit. In dit stelsel verbeelden wij ons *twee* verschillende bewegingstoestanden, ieder door zijn eigen electromotorische krachten opgewekt; de grootheden die bij den eersten bewegingstoestand te pas komen zullen door de boven aangegeven letters, en de overeenkomstige grootheden voor den anderen toestand door dezelfde letters met accenten worden voorgesteld.

Eindelijk denken wij ons een willekeurig gesloten oppervlak σ, en verstaan onder τ de ingesloten ruimte, onder $d\sigma$ en $d\tau$ een oppervlakte- en een ruimte-element. Dan kan, door toepassing van de voor alle lichamen geldende bewegingsvergelijkingen, met behulp van eene partieele integratie, de volgende formule worden bewezen:

$$\frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{H}\,\dot{\mathfrak{B}}')\,d\tau + \int(\mathfrak{E}'\,\mathfrak{S})\,d\tau = \frac{1}{4\pi}\int \begin{vmatrix} \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_y, & \mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{E}'_x, & \mathfrak{E}'_y, & \mathfrak{E}'_z \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

De twee eerste integralen hebben op de geheele ruimte τ, de derde op het geheele oppervlak σ betrekking. Verder zijn λ, μ en ν de richtingsconstanten der aan dit laatste naar buiten getrokken normaal.

Hier en in 't vervolg wordt met $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})$ het scalaire product van twee vectoren $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ voorgesteld en met $\dot{\mathfrak{A}}$ een vector, wiens componenten zijn $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial t}$.

§ 3. Onderstelt men dat de twee bewegingstoestanden dezelfde zijn, dan gaat (I) over in

$$\frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{H}\,\dot{\mathfrak{B}})\,d\tau + \int(\mathfrak{E}\,\mathfrak{S})\,d\tau = \frac{1}{4\pi}\int\begin{vmatrix}\mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_y, & \mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{E}_y, & \mathfrak{E}_z \\ \lambda, & \mu, & \nu\end{vmatrix} d\sigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

hetgeen niet anders is dan het theorema van POYNTING. Wanneer wij nl. onderstellen dat tusschen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ de gewone lineaire betrekkingen bestaan, dan is de eerste term de aangroeiing per tijdseenheid van de in de ruimte τ aanwezige electrokinetische energie. De tweede term gaat voor een metaal, wanneer men daarvoor de wet van OHM aanneemt, en dus het verband tusschen $\mathfrak{E} + \mathrm{E}$ en $\mathfrak{S}$ uitdrukt door

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{E}_x + \mathrm{E}_x &= \varkappa_{1\cdot1}\,\mathfrak{S}_x + \varkappa_{1\cdot2}\,\mathfrak{S}_y + \varkappa_{1\cdot3}\,\mathfrak{S}_z, \\ \mathfrak{E}_y + \mathrm{E}_y &= \varkappa_{2\cdot1}\,\mathfrak{S}_x + \varkappa_{2\cdot2}\,\mathfrak{S}_y + \varkappa_{2\cdot3}\,\mathfrak{S}_z, \\ \mathfrak{E}_z + \mathrm{E}_z &= \varkappa_{3\cdot1}\,\mathfrak{S}_x + \varkappa_{3\cdot2}\,\mathfrak{S}_y + \varkappa_{3\cdot3}\,\mathfrak{S}_z,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

met

$$\varkappa_{1\cdot2} = \varkappa_{2\cdot1} \qquad \varkappa_{2\cdot3} = \varkappa_{3\cdot2} \qquad \varkappa_{3\cdot1} = \varkappa_{1\cdot3}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

over in

$$\int(\varkappa_{1\cdot1}\,\mathfrak{S}_x^2 + \varkappa_{2\cdot2}\,\mathfrak{S}_y^2 + \varkappa_{3\cdot3}\,\mathfrak{S}_z^2 + 2\,\varkappa_{1\cdot2}\,\mathfrak{S}_x\,\mathfrak{S}_y + 2\,\varkappa_{2\cdot3}\,\mathfrak{S}_y\,\mathfrak{S}_z +$$

$$+ 2\,\varkappa_{3\cdot1}\,\mathfrak{S}_z\,\mathfrak{S}_x)\,d\tau - \int(\mathrm{E}\,\mathfrak{S})\,d\tau,$$

en hier stelt de eerste term de warmteontwikkeling per tijdseenheid voor, en de tweede den negatief genomen arbeid der electromotorische krachten. Op dergelijke wijze vindt men dat de tweede integraal voor een dielectricum gelijk is aan de toename der electrostatische energie, verminderd met den arbeid der electromotorische krachten, beide berekend per tijdseenheid.

Houdt men dit een en ander in het oog, dan volgt uit (II) dat het tweede lid de hoeveelheid arbeidsvermogen moet voorstellen, die per tijdseenheid door het oppervlak σ naar binnen gaat. Het ligt voor de hand zich voor te stellen dat door elk element $d\sigma$ naar binnen treedt de hoeveelheid

$$\frac{1}{4\pi}\begin{vmatrix} \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_y, & \mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{E}_y, & \mathfrak{E}_z \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} d\sigma$$

en dit is wat POYNTING beweert.

§ 4. Men kan de zaak ook omkeeren en, uitgaande van de stelling van POYNTING, besluiten dat, ook dan b.v. wanneer tusschen $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{H}$ niet meer eene eenvoudige lineaire betrekking bestaat, de eerste term in (II) de toename van het arbeidsvermogen in een magnetiseerbaar lichaam, vermeerderd met eene eventueele warmteontwikkeling, moet zijn.

Heeft er geene warmteontwikkeling plaats, dan moet dus het electrokinetische arbeidsvermogen per volume-eenheid, wat ook het verband zij tusschen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$, worden gegeven door

$$\frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{H}\,\dot{\mathfrak{B}})\,dt,$$

de integraal te nemen van af den oorspronkelijken niet magnetischen toestand.

Zooals bekend is, kan men, wegens het verschijnsel der magnetische hysteresis, een stuk ijzer een kringloop van veranderingen doen ondergaan, voor welken

$$\frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{H}\,\dot{\mathfrak{B}})\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

niet 0 is, maar eene positieve waarde heeft. Daar, als de kringloop volbracht is, het ijzer weder dezelfde electrische energie moet bevatten als aanvankelijk, moet (3) de warmteontwikkeling per volume-eenheid voorstellen, dus het verlies aan electrisch arbeidsvermogen van het geheele stelsel. Men kan voor (3) natuurlijk schrijven

$$\frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{H}\, d\, \mathfrak{B}).$$

In dezen vorm is de stelling herhaaldelijk bewezen en toegepast [1]), ofschoon misschien nooit op zoo eenvoudige wijze als het theorema van POYNTING veroorlooft.

De dielectrische hysteresis geeft natuurlijk tot dergelijke beschouwingen aanleiding.

In het vervolg zal worden aangenomen dat zoowel het verband tussen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ als dat tusschen $\mathfrak{S}$ (of $\mathfrak{D}$) en $\mathfrak{E}$ door de gewone lineaire vergelijkingen met constante coefficienten wordt uitgedrukt.

§ 5. Keeren wij terug tot de twee verschillende bewegingstoestanden, waarvan in de vergelijking (I) sprake is. Natuurlijk geldt eveneens de vergelijking die men uit (I) verkrijgt, als men de grootheden die op den eersten en den tweeden bewegingstoestand betrekking hebben, met elkaar verwisselt. Door verder de twee vergelijkingen van elkander af te trekken, vindt men:

$$\frac{1}{4\pi}\int\left\{(\mathfrak{H}\,\dot{\mathfrak{B}}')-(\mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}})\right\}d\tau+\int\left\{(\mathfrak{E}'\,\mathfrak{S})-(\mathfrak{E}\,\mathfrak{S}')\right\}d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\left\{\begin{vmatrix}\mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_y, & \mathfrak{H}_z\\ \mathfrak{E}'_x, & \mathfrak{E}'_y, & \mathfrak{E}'_z\\ \lambda, & \mu, & \nu\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\mathfrak{H}'_x, & \mathfrak{H}'_y, & \mathfrak{H}'_z\\ \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{E}_y, & \mathfrak{E}_z\\ \lambda, & \mu, & \nu\end{vmatrix}\right\}d\sigma \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

De gevolgtrekkingen die wij uit deze vergelijking kunnen afleiden berusten hierop dat in vele gevallen de eerste integraal verdwijnt.

Dit is b,v. het geval, wanneer beide bewegingstoestanden in eene stationaire strooming in een stelsel geleiders bestaan; immers, dan is $\dot{\mathfrak{B}}=0$ en $\dot{\mathfrak{B}}'=0$. Neemt men dan voor σ het oppervlak van een bol die om eenig punt dezer geleiders als middelpunt beschreven is, en waarvan de straal al grooter en grooter wordt, dan nadert het tweede lid der vergelijking tot 0, daar de door constante stroomen teweeggebrachte magnetische kracht op groote afstanden omgekeerd evenredig met de derde macht van den afstand verandert.

---

[1]) WARBURG, Wied. Ann., Bd. 13, p. 141.
EWING, Phil. Trans. London, 1885, p. 549.

Men houdt dus over, als men bovendien de vergelijkingen (1) en (2) toepast,

$$\int (\mathrm{E}' \mathfrak{S})\, d\tau = \int (\mathrm{E}\, \mathfrak{S}')\, d\tau.$$

Stel nu dat bij den eersten bewegingstoestand alleen in eene zekere zeer kleine ruimte ω, gelegen aan het punt P, eene electromotorische kracht E in de richting h werkt, en eveneens bij den tweeden toestand eene electromotorische kracht E' in de richting h' binnen eene zeer kleine ruimte ω', gelegen aan P', dan is, als de eerste electromotorische kracht in P' een stroom oplevert, waarvan de component volgens h' door $\mathfrak{S}_{h'}$ (P') wordt voorgesteld, en $\mathfrak{S}'_h$ (P) eene soortgelijke beteekenis heeft voor het tweede geval,

$$\mathfrak{S}_{h'}(P') \,:\, \mathfrak{S}'_h(P) = \int_\omega \mathrm{E}\, d\,\tau \,:\, \int_{\omega'} \mathrm{E}'\, d\,\tau,$$

waaruit men gemakkelijk eene bekende stelling afleidt [1]).

§ 6. De vergelijking (III) kan ook op de voortplanting van *lichttrillingen* worden toegepast, wanneer men zich voorstelt dat deze door periodieke electromotorische krachten in de „lichtbronnen" worden opgewekt [2]). Wij zullen ons bepalen tot enkelvoudige trillingen met bepaalden trillingstijd, en dus aannemen dat over eene zekere uitgestrektheid eene electromotorische kracht werkt, waarvan de componenten als goniometrische functiën van den tijd gegeven zijn. Werken zulke krachten aanhoudend, dan zullen zich enkelvoudige trillingen naar alle zijden, en dus ook van het stelsel lichamen uit, in den aether voortplanten. Zooals men weet, kan men in het algemeen, en vooral wanneer er absorptie plaats heeft, den bewegingstoestand het gemakkelijkst bepalen door in plaats van de voor E_x, E_y, E_z gegeven goniometrische functiën van den tijd eerst waarden te stellen, die den tijd alleen in den factor

---

[1]) Zie b.v. Maxwell, Electricity and Magnetism, 2e ed., Vol. 1, p. 373.

[2]) Het zou meer aan de werkelijkheid beantwoorden, zoo wij in de lichtbronnen „ionen" ondersteldden, die op deze of gene wijze in trilling worden gehouden. De gekozen opvatting maakt de theorie eenvoudiger en komt in vele opzichten op hetzelfde neer.

$$e^{int}, \quad (i = \sqrt{-1}, \ n \text{ constant})$$

bevatten en waarvan de werkelijke waarden de reëele gedeelten zijn. Aan de bewegingsvergelijkingen kan dan voldaan worden door voor de componenten van $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$ eveneens uitdrukkingen te stellen, waarin deze factor voorkomt. Zijn deze uitdrukkingen gevonden dan heeft men, om de werkelijke beweging te leeren kennen, van alle het reëele gedeelte te nemen.

Wij zullen de complexe uitdrukkingen, waarvan ten slotte het reëele gedeelte moet genomen worden, de „symbolische" waarden noemen en nu in de vergelijking (III) onder de teekens $\mathfrak{E}_x$, enz. deze waarden verstaan. Uit de afleiding der vergelijking blijkt gemakkelijk dat dit geoorloofd is, mits men voor ($\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$) nu leze

$$\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z.$$

Ten gevolge van de ingevoerde onderstellingen wordt

$$(\mathfrak{H}\dot{\mathfrak{B}}') - (\mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}}) = in \left\{ (\mathfrak{H}\mathfrak{B}') - (\mathfrak{H}'\mathfrak{B}) \right\}$$

en verdwijnt dus, wegens het verband tusschen $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{B}$.

Wij nemen verder voor σ een oneindig grooten bol en kunnen dan aantoonen dat ook de derde integraal in (III) 0 is. Wat de tweede betreft, valt op te merken dat men bij het werken met de symbolische uitdrukkingen voor elk lichaam de vergelijkingen (1) en (2) kan laten gelden, als men maar onder de coefficienten $\varkappa$ complexe en van n afhankelijke grootheden verstaat; dien tengevolge blijven, evenals in de vorige §, alleen de termen met E en E′ over.

Wij bepalen ons tot het geval dat E alleen in eene oneindig kleine ruimte ω aan het punt P werkt, en wel overal in dezelfde richting h, met de (reëele) richtingsconstanten a, b, c; eveneens moge E′ beperkt zijn tot de oneindig kleine ruimte ω' aan het punt P′ en de richting h', met de (eveneens reëele) richtingsconstanten a', b', c' hebben.

Indien dan met E en E′ de symbolische uitdrukkingen voor de electromotorische krachten zelf worden aangeduid, kunnen wij voor de vergelijking schrijven

$$\left\{ a' \mathfrak{S}_x(P') + b' \mathfrak{S}_y(P') + c' \mathfrak{S}_z(P') \right\} \int_{\omega'} \mathrm{E}'\, d\tau =$$
$$= \left\{ a\, \mathfrak{S}_x'(P) + b\, \mathfrak{S}_y'(P) + c\, \mathfrak{S}_z'(P) \right\} \int_{\omega} \mathrm{E}\, d\tau.$$

Wij zullen aannemen dat bij den eersten bewegingstoestand de electromotorische kracht in de oneindig kleine ruimte ω overal dezelfde phase heeft en dus b.v. door $q \cos nt$ kan worden voorgesteld. Wij noemen dan die ruimte eene *enkelvoudige lichtbron met de trillingsrichting* h en kennen deze de phase van de electromotorische kracht zelf toe.

Verder noemen wij $\int q\, d\tau = s$ de *sterkte* der lichtbron; men ziet gemakkelijk in dat de op eenigen afstand opgewekte waarden van $\mathfrak{S}$ enz. alle evenredig met die sterkte moeten zijn.

Nemen wij nu aan dat ook E' den factor cos nt bevat en noemen wij de intensiteit der tweede lichtbron s', dan moeten wij voor de intregralen in onze laatste vergelijking schrijven:

$$s\, e^{int} \text{ en } s'\, e^{int},$$

zoodat wij vinden

$$\mathfrak{S}_{h'}(P') : \mathfrak{S}'_h(P) = s : s',$$

waarbij wij onder de eerste termen de symbolische waarden van de componenten $\mathfrak{S}_{h'}$ en $\mathfrak{S}'_h$, de eerste in P' en de tweede in P, te verstaan hebben. Daar s en s' reëel zijn, bestaat dezelfde verhouding ook tusschen de werkelijke waarden der componenten; derhalve:

Bestaan, bij twee bewegingstoestanden, in de punten P en P' enkelvoudige lichtbronnen met de richtingen h en h', en met gelijke intensiteit en phase, dan is de electrische stroom, dien de eerste in P' in de richting h' geeft, ten allen tijde gelijk aan den electrischen stroom, dien de tweede lichtbron in het punt P in de richting h teweegbrengt.

Eene stelling, die veel overeenkomst hiermede vertoont, is door von Helmholtz in zijne Physiologische Optik uitgesproken en men vindt bij verschillende schrijvers, o. a. bij Rayleigh [1]) en von Helmholtz [2]) zelven voor trillende stelsels in 't algemeen, echter, strikt genomen, voor staande trillingen, dergelijke theorema's bewezen.

---

[1]) Rayleigh, Theory of Sound, 1st. Ed., Vol. 1, p. 111.

[2]) von Helmholtz, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 100, p.p. 217—222.

§ 7. Wij kunnen uit de verkregen uitkomst nog eene gevolgtrekking afleiden, die ons straks van dienst zal zijn. Gemakshalve zullen wij daarbij eene lichtbron aanduiden door, behalve de richting, de werkelijke of de symbolische waarde van $\int E\, dr$ tusschen vierkante haken te plaatsen. Stel nu dat eene lichtbron $[e^{int}]$, in het punt P, met de richting h, in P′ volgens de richting h' een stroom teweegbrengt, waarvan de symbolische waarde is $\mathfrak{S}_{h'}(P')$. Deze uitdrukking hangt van de ligging van P′ af en kan dus naar eene of andere richting k — waarin wij P′ verplaatst denken — gedifferentieerd worden. Komt, na eene oneindig kleine verplaatsing δ, P′ in P″, dan is klaarblijkelijk

$$\delta \frac{\partial \mathfrak{S}_{h'}(P')}{\partial k} = \mathfrak{S}_{h'}(P'') - \mathfrak{S}_{h'}(P') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Maar, volgens de vorige §, is $\mathfrak{S}_{h'}(P')$ gelijk aan de stroomcomponent $\mathfrak{S}_h$, in P teweeggebracht door eene lichtbron $[e^{int}]$ in P′ in de richting h'. Op dezelfde wijze is $\mathfrak{S}_{h'}$ (P″) gelijk aan de stroomcomponent volgens h, in P opgewekt door eene lichtbron $[e^{int}]$ in P″, evenecns in de riehting h'.

Het tweede lid der vergelijking is dus niet anders dan de waarde van $\mathfrak{S}_h$ in P, veroorzaakt door het gelijktijdig bestaan van twee liehtbronnen, $[e^{int}]$ in P″ en $[-e^{int}]$ in P′, beide in de richting h'. Kennen wij aan deze lichtbronnen, in plaats van de sterkte 1, die zij nu hebben, de sterkte s toe, zoodat zij door $[s\, e^{int}]$ en $[-s\, e^{int}]$ worden voorgesteld, dan wordt de waarde van $\mathfrak{S}_h$, die zij in P teweegbrengen

$$s \left\{ \mathfrak{S}_{h'}(P'') - \mathfrak{S}_{h'}(P') \right\},$$

of, volgens (4),

$$s\, \delta \frac{\partial \mathfrak{S}_{h'}(P')}{\partial k}.$$

Wij zullen de hier besproken eombinatie van twee lichtbronnen van gelijke riehting en sterkte, maar tegengestelde phase, een *koppel van lichtbronnen* noemen en onder de *sterkte* van dit koppel het product $s\, \delta$ verstaan.

Het blijkt dus dat de waarde in P' van

$$\frac{\partial\, \mathfrak{S}_{h'}(P')}{\partial\, k}$$

gelijk is aan de waarde van $\mathfrak{S}_h$, in P teweeggebracht door een zeker koppel in P'.

Het verdient nog opmerking dat de symbolische waarden voor $\mathfrak{E}_x$, enz., die eene lichtbron $[c\, s\, e^{int}]$ teweegbrengt, zich alleen door den factor c onderscheiden van de waarden, behoorende bij eene lichtbron $[s\, e^{int}]$ op dezelfde plaats en met dezelfde richting, en dat wel, ook al is c een complex getal.

Eveneens zal men, zoo men de lichtbronnen $[s\, e^{int}]$ en $[-s\, e^{int}]$ van een koppel door $[c\, s\, e^{int}]$ en $[-c\, s\, e^{int}]$ vervangt, alle daarvan afhankelijke symbolische waarden met c vermenigvuldigen.

§ 8. Uit de vergelijking (III) kan nu eindelijk eene stelling worden afgeleid, die kan worden opgevat als eene generalisatie van het bekende principe van HUYGENS. Om daartoe te geraken verstaan wij onder σ een gesloten oppervlak van eindige afmetingen, dat de beschouwde lichamen op willekeurige wijze doorsnijdt of omringt, en nemen voor den *eersten* bewegingstoestand de trillingen die door deze of gene *uitwendige* lichtbronnen van de periode $\frac{2\pi}{n}$ worden opgewekt. *Dezen* bewegingstoestand wenschen wij te onderzoeken; de invoering van den *tweeden* is slechts een hulpmiddel daarbij.

Zij Q een willekeurig punt binnen σ. Wij denken ons daar eene enkelvoudige lichtbron $[e^{int}]$ in de richting h en kiezen voor den tweeden toestand de door deze opgewekte trillingen.

Voor de eerste integraal in (III) vinden wij weder 0, en voor de tweede

$$-\, e^{int}\, \mathfrak{S}_h(Q),$$

zoodat wij verkrijgen

$$\mathfrak{S}_h(Q) = -\frac{1}{4\pi}\, e^{-int} \int \begin{vmatrix} \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_y, & \mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{E}'_x, & \mathfrak{E}'_y, & \mathfrak{E}'_z \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} d\sigma \;+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\, e^{-int} \int \begin{vmatrix} \mathfrak{H}'_x, & \mathfrak{H}'_y, & \mathfrak{H}'_z \\ \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{E}_y, & \mathfrak{E}_z \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} d\sigma \quad . \quad . \quad (5)$$

De elementen van deze integralen, die beantwoorden aan een bepaald element $d\sigma$, liggende aan het punt P, zullen wij nader beschouwen, en wel in de onderstelling dat daar ter plaatse de waarden van $\mathfrak{H}_x$, enz., $\mathfrak{E}_x$, enz. (de symbolische waarden) bekend zijn.

Het bedoelde element van de eerste integraal kan dan worden voorgesteld als eene homogene lineaire functie van $\mathfrak{E}'_x, \mathfrak{E}'_y, \mathfrak{E}'_z$, dus ook als eene zoodanige functie van $\mathfrak{S}'_x$, $\mathfrak{S}'_y$, $\mathfrak{S}'_z$. Den factor $-\frac{1}{4\pi}e^{-int}$ er onder begrijpende, schrijven wij voor die functie

$$\varphi\,\mathfrak{S}'_x + \psi\,\mathfrak{S}'_y + \chi\,\mathfrak{S}'_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

De coefficienten φ, ψ, χ zijn bekende complexe grootheden, die natuurlijk $d\sigma$ als factor bevatten, maar onafhankelijk van den tijd zijn, daar in $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ de factor e^{int} voorkomt. Verder zijn die coefficiënten onafhankelijk van de ligging van het punt Q en van de gekozen richting h.

Nu is $\mathfrak{S}'_x$ de waarde van $\mathfrak{S}_x$, in P teweeggebracht door eene lichtbron $[e^{int}]$ in Q in de richting h. Volgens § 6 is dus $\mathfrak{S}'_x$ ook gelijk aan de waarde van $\mathfrak{S}_h$, die in Q zou worden veroorzaakt door eene lichtbron $[e^{int}]$ in P, in de richting der x-as. Wanneer wij dus in P in deze richting eene lichtbron $[\varphi\, e^{int}]$, en eveneens in de richtingen der y- en der z-as lichtbronnen $[\psi\, e^{int}]$, $[\chi\, e^{int}]$ plaatsen, zullen deze in Q een stroom in de richting h geven, waarvan de symbolische uitdrukking eene eerste bijdrage voor $\mathfrak{S}_h(Q)$ is.

Het thans te beschouwen element van de tweede der integralen in (5) is eene lineaire homogene functie van $\mathfrak{H}'_x$, $\mathfrak{H}'_y$, $\mathfrak{H}'_z$ en kan dus ook als eene dergelijke functie van $\mathfrak{B}'_x, \mathfrak{B}'_y, \mathfrak{B}'_z$ voorgesteld worden, en ook van $\dot{\mathfrak{B}}'_x$, $\dot{\mathfrak{B}}'_y$, $\dot{\mathfrak{B}}'_z$, daar deze grootheden zich van $\mathfrak{B}'_x, \mathfrak{B}'_y, \mathfrak{B}'_z$ alleen door den factor in onderscheiden. Substitueert men nu verder voor $\dot{\mathfrak{B}}'_x$, enz. de uit de bewegingsvergelijkingen voortvloeiende waarden:

$$\frac{\partial\,\mathfrak{E}'_y}{\partial z} - \frac{\partial\,\mathfrak{E}'_z}{\partial y}, \text{ enz.,}$$

en eindelijk hierin weder de waarden van $\mathfrak{E}'_x$, $\mathfrak{E}'_y$, $\mathfrak{E}'_z$, uitgedrukt in $\mathfrak{S}'_x$, $\mathfrak{S}'_y$, $\mathfrak{S}'_z$, dan verkrijgt men, nevens eene homogene, lineaire functie van $\mathfrak{S}'_x$, $\mathfrak{S}'_y$, $\mathfrak{S}'_z$, die bij (6) kan worden gevoegd, eene dergelijke functie van de differentiaalquotienten dezer grootheden naar de coördinaten. Van de coefficiënten, waarmede deze differentiaalquotienten vermenigvuldigd worden, geldt weer, als wij er den factor

$\frac{1}{4\pi} e^{-int}$ onder begrijpen, hetzelfde wat van φ, ψ, χ werd opgemerkt.

Het zal nu voldoende zijn, op een der termen, die men aldus verkrijgt, b.v. op

$$\zeta \frac{\partial \mathfrak{S}'_y}{\partial z}$$

de aandacht te vestigen. Uit het in de vorige § gezegde kan men afleiden dat dit de symbolische uitdrukking van den stroom is, die in Q in de richting h ontstaat door een koppel van lichtbronnen in P. En wel moeten de twee lichtbronnen die het koppel samenstellen in de richting der z-as op een oneindig kleinen afstand δ van elkander liggen, terwijl elke lichtbron de richting der y-as heeft en de eene door $\left[\frac{\zeta}{\delta} e^{int}\right]$, de andere door $\left[-\frac{\zeta}{\delta} e^{int}\right]$ wordt voorgesteld.

De slotsom van deze redeneering is dat men over het oppervlak σ eene zoodanige laag van enkelvoudige lichtbronnen en bovendien eene zoodanige laag van koppels van lichtbronnen kan verdeelen, dat deze voor $\mathfrak{S}_h$ in Q dezelfde symbolische waarde geven, als de uitwendige lichtbronnen. Dan zal echter ook dezelfde overeenstemming bestaan wat de werkelijke waarden van $\mathfrak{S}_h$ betreft.

Wat de bedoelde op σ aan te brengen lichtbronnen zelve aangaat, deze zijn geheel bekend, daar wij van elke lichtbron de richting kunnen aangeven en de integraal $\int E d\tau$ gelijk moet zijn aan het reëele deel der complexe uitdrukking die, tusschen vierkante haken geschreven, gediend heeft om de lichtbron voor te stellen. Daar de aldus bepaalde lichtbronnen dezelfde worden, hoe men het punt Q en de richting h ook kieze, blijkt het dat de toestand in elk punt binnen het oppervlak σ kan worden beschouwd als voortgebracht door eene bepaalde verdeeling van trillingsmiddelpunten over dit oppervlak.

Eene dergelijke stelling werd voor het geval van een enkel doorschijnend isotroop medium reeds vroeger door KIRCHHOFF bewezen [1]).

Hierop volgt eene korte discussie over sommige punten der voordracht tusschen den Spreker en de Heeren KORTEWEG en VAN DER WAALS.

---

[1]) KIRCHHOFF, Wied. Ann. Bd. 18, p. 663.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Dr. P. ZEEMAN eene mededeeling aan, getiteld: „*Metingen over de absorptie van electrische trillingen in verschillende electrolyten*”, verricht in het Natuurkundig Laboratorium te Leiden.

1. Bij de bepaling van een absorptiecoëfficient voor electrische trillingen in een electrolyt, die de vorige maand [1]) aan de Akademie werd medegedeeld, moest ik gebruik maken van de onderstelling, dat het zonder meer geoorloofd was [2]) om de uitslagen van den bolometer met het constante bedrag te verminderen, dat achter in den bak werd waargenomen. Het zou zeker een betrekkelijk uitvoerig onderzoek vereischen om het geoorloofde dier onderstelling werkelijk aan te toonen. Echter slaagde ik er in, de proef zóó in te richten, dat geen belangrijke storingen meer optraden en het gelukte mij het genoemde constante bedrag aan 't einde van den bak te doen verdwijnen. Thans is werkelijk aan het einde van den bak de invallende energie geheel geabsorbeerd [3]).

Oorzaken, die zulk een constanten uitslag te voorschijn kunnen roepen, bleken mij te zijn: 1°. onvolkomen polijsting der bollen, waartusschen de vonk overspringt; 2°. te groote taaiheid der isoleerende vloeistof die de bollen omgeeft; 3°. groote weerstand in de toeleidingsdraden van inductorium naar bollen: 4°. capaciteit in de genoemde draden; 5°. geleidend verband van een der beide LECHER'sche draden met andere metaalmassa's; 6°. inductie stroomen in de draden, die de fleschjes met den bolometer verbinden.

Bij mijne proeven brachten voornamelijk de oorzaken 1 en 2 de storing teweeg.

Zoodra mij dit gebleken was, kon ik natuurlijk gemakkelijk zorgen, dat deze foutenbron vermeden werd. Verder kon de inrichting der proeven geheel dezelfde blijven als in de vorige mededeeling werd aangegeven.

2. Voor een keukenzoutoplossing van ongeveer dezelfde concentratie als ik vroeger gebruikte, heb ik, onder de nu gunstiger omstandigheden, nog eens de absorptie onderzocht. De uitkomsten zijn in overeenstemming met het vroeger gevondene. Alleen hebben de nu

[1]) Zitting 26 October 1895.

[2]) l. c. p. 4.

[3]) l. c. p. 3.

verkregen resultaten meer waarde, niet slechts omdat de verbetering (1.) was aangebracht, maar ook door de betere techniek van de waarnemingsmethode.

Het scheen mij interessant om de absorptie van een keukenzoutoplossing met die van een andere van hetzelfde geleidingsvermogen te vergelijken, wat betreft hare absorpties. Ik koos voor die tweede oplossing kopersulfaat. Beide oplossingen hadden t. o. v. kwikzilver, het geleidingsvermogen $\lambda = 3340.10^{-10}$, terwijl de temperatuur bij de waarnemingen $\theta = 18^{0}.0$ was.

De volgende tabel, ontleend aan de waarnemingen met kopersulfaat, diene als voorbeeld der waarnemingen.

Doorloopen vloeistof.	Waargenomen uitslag.			Gemiddeld	Afwijking van het midden.		
0	47	47	47	47	0	0	0
2.5	27	30	27	28	— 2	+ 2	— 1
5	16	24	17	19	— 3	+ 5	— 2
7.5	14	10	15	13	+ 1	— 3	+ 2
10	7	11	9	9	— 2	+ 2	0
15	0	7	5	4	— 4	+ 3	+ 1
20	3	0	2	1.7	+ 1.3	— 1.7	+ 0.3
47	0	0	0	0	0	0	0

De tweede kolom geeft de waargenomen uitslagen van den bolometer bij 3 reeksen, de derde daarvan het gemiddelde, de vierde de afwijkingen van het midden. In het geheel werden 18 waarnemingsreeksen bij kopersulfaat verricht.

Ten einde te laten zien dat door combinatie der waarnemingen de nauwkeurigheid grooter wordt heb ik de uitkomsten van 6 reeksen samengesteld en de 3 aldus verkregen reeksen, weder met hun gemiddelde vergeleken. Dit gemiddelde kan dan als de uitkomst voor kopersulfaat beschouwd worden.

Oplossing van kopersulfaat $\lambda = 3340.10^{-10}$ $\theta = 18^0.0$.

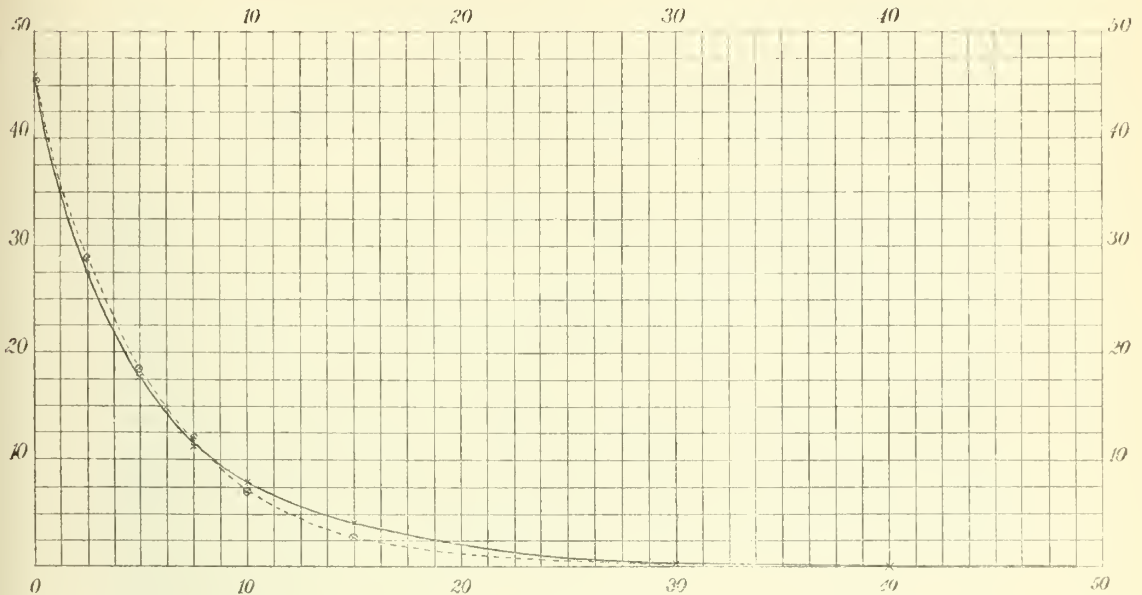
Doorloopen vloeistof.	Waargenomen uitslagen.			Gemidd	Afwijking van het midden.			Berekend.	Waargen. - berekend.
0	47	47	47	47.0	0	0	0	47.0	0
2.5	30	28	30	29.3	+ 0.7	— 1.3	+ 0.7	30.0	— 0.7
5	16	18	18	17.3	— 1.3	+ 0.7	+ 0.7	19.1	— 1.8
7.5	11	13	12.5	12.1	— 1.1	+ 0.9	+ 0.4	12.2	— 0.1
10	8	9	10	9.0	— 1.0	0.0	+ 1.0	7.8	+ 1.2
15	6	4	4	4.7	+ 1.3	— 0.7	— 0.7	3.2	+ 1.5
20	2	0	2	1.3	+ 0.7	— 1.3	+ 0.7	1.3	0
47	0	0	0	0	0	0	0	0	0

De uitkomsten voor keukenzout zijn op dezelfde wijze voorgesteld.

Oplossing van keukenzout $\lambda = 3340.10^{-10}$ $\theta = 18^0.0$.

Doorloopen vloeistof.	Waargenomen uitslagen.			Gemidd.	Afwijking van het midden.			Berekend.	Waargen. - berekend.
0	46	43	48	45.7	+ 0.3	— 2.7	+ 2.3	46.0	— 0.3
2.5	27	28	28	27.7	— 0.7	+ 0.3	+ 0.3	29.0	— 1.3
5	16	20	18	18 0	— 2.0	+ 2.0	0	18.3	— 0.3
7.5	10	12	12	11.3	— 1.3	+ 0.7	+ 0.7	11 6	— 0.3
10	7	9	8	8.0	— 1	+ 1	0	7.3	+ 0.7
15	4	5	4	4.3	— 0.3	+ 0.7	— 0.3	2.9	+ 1.4
31	0	1	0	0.3	— 0.3	+ 0.7	— 0.3	0.2	+ 0.1
47	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Het verloop der uitslagen blijkt voor de oplossingen van keukenzout en kopersulfaat hetzelfde te zijn binnen de grenzen te waarnemingsfouten. In de fig. is de kromme voor keukenzout weergegeven. De gestippelde lijn is de voorstelling van $46.e^{-2pz}$, waarin



$p = 0.092$ de waarde is die bij de waarnemingen zoo goed mogelijk aansluit. Ten einde te doen zien in hoeverre de exponentieele vorm de waarnemingen weergeeft, is onder „berekend" de waarde er van aangegeven en zijn in de laatste kolom de verschillen met de waargenomen uitslagen vermeld. De afwijkingen, die er nog overblijven, overschrijden een weinig de grens der waarnemingsfouten en moeten dus nog nader worden onderzocht.

Ten einde de figuur niet onduidelijk te maken zijn de waarnemingen over kopersulfaat niet grafisch voorgesteld. Zij worden op dezelfde wijze als die voor keukenzout weergegeven door $47.e^{-2pz}$, waarin $p = 0.090$. De waarden van p op deze wijze berekend blijken dus in de beide gevallen binnen de grenzen der fouten van waarneming hetzelfde te zijn. Worden bij andere zouten geen afwijkingen aangetroffen dan kan men voor Hertzsche trillingen in verdunde waterige oplossingen den regel uitspreken: *oplossingen van gelijk geleidingsvermogen absorbeeren trillingen van denzelfden trillingstijd even sterk.*

Door Prof. Cohn [1]) is reeds opgemerkt dat voor lichttrillingen zulk een regel volstrekt niet bestaat. Het groote verschil dat er tusschen de absorptie voor licht- en electrische trillingen bestaat, kan ook nog op een andere wijze worden uitgedrukt. Volgens de theorie der electrolytische dissociatie moeten verdunde oplossingen waarin *aequivalente* hoeveelheden van een gekleurd ion zijn opgelost

---

[1] Cohn, Wied Ann. Bd. 45, p. 59. 1892.

even sterk het licht van deze kleur absorbeeren. OSTWALD heeft dit bevestigd gevonden. Daar aequivalente oplossingen van verschillende verbindingen van eenzelfde gekleurd ion echter *geheel verschillend* geleidingsvermogen kunnen hebben, zoo valt het verschillend gedrag van oplossingen t. o. v. de beide soorten van trillingen duidelijk in het oog.

3. Door de waarde van p in verband met de in de vorige zitting reeds medegedeelde gegevens, zijn nu de noodige getallen bekend om een vergelijking van de waargenomen absorptie met de uit de theorie afgeleide mogelijk te maken. Hierop zal later worden teruggekomen.

De tot nu verkregen resultaten kunnen aldus worden samengevat:

1. Bij electrische trillingen, waarvan de golflengte 6.5 M. bedraagt, daalt bij het doorloopen van een laag eener keukenzoutoplossing van 5,1 cM. dikte, de intensiteit op het $^1/_e$de deel van de oorspronkelijke waarde, als voor die oplossing $\lambda = 3340.10^{-10}$ is.

Deze uitkomst is nu onafhankelijk van een in mijn vorig opstel noodzakelijke onderstelling.

2. In waterige oplossingen van gelijk geleidingsvermogen worden trillingen van denzelfden trillingstijd even sterk geabsorbeerd. Zie § 2.

Aardmagnetisme. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Dr. W. VAN BEMMELEN te Utrecht eene mededeeling aan, getiteld: „*Die Linien gleicher Säkular-Variation der Declination*".

Diesen Sommer wurde von mir eine Uebersichtskarte der Säkular-Variation der Declination veröffentlicht (cf. Sitzungsbericht 1895, Sept. 28). Die dabei benutzten Declinationen waren gezogen aus den Isogonenkarten, für das 16te und 17te Jahrhundert von mir, für das 18te von HANSTEEN und für das 19te von SABINE, NEUMAYER und andern. In dieser Karte sind für die berücksichtigten Punkte (die Schnittpunkte der Parallelen + 70°, + 60°, + 40°, 0°, — 20°, — 40°, — 50° mit den Meridianen: 0° Greenwich, 20°, 40° etc.) die Variations-Curven gezogen [1]). Hierbei sind kleinere Unregelmässigkeiten nicht beachtet und fehlende Theile nach Analogie mit benachbarten Curven gezeichnet. Der hauptsächlichste Werth liegt in der Homogenität der gesammten Darstellung.

---

[1]) Es ist leider in dieser Karte ein Fehler eingeschlichen. Die Curven für 60° und 80° östliche Länge und 70° nördliche Breite sind falsch gezogen. Mit folgenden

Bei der Herstellung der Isogonenkarten für das 16te en 17te Jahrhundert sind nur die Declinationen einiger Oertlichkeiten mittelst der Säkular-Variation auf die Epoque der Karte reducirt worden. Wegen der Ungewissheit und der meist kleinen Werthe der Variation ist beim gröszeren Theile derselben dies nicht geschehen. Da jetzt aber die Karten vorliegen und die grosze Vermehrung des Materiales ihre Erneuerung wünschenswerth macht, ist es nöthig die Säkular-Variation in eine für den Gebrauch geeignete Form zu bringen.

Am besten dazu geeignet ist wohl der Werth der jährlichen Aenderung in Minuten für die Epoque der Karte.

Diesen Werth habe ich abgeleitet durch Messung der Neigung der Variations-Curve für die Epoquen: 1540, 1580, 1610, 1640, 1665, 1680, 1700, 1710, 1720 und 1730 wegen des obenangeführten Zweckes, und für 1780 und 1880 um einen Ueberblick der Variation während der ganzen Periode zu erhalten. Die Werthe wurden in Karten eingetragen und die Linien gleicher Variation von fünf bis fünf Minuten gezogen.

Als fraglich wurde ein Werth angenommen, wenn die Variations-Curve in dem Punkte, wo die Neigung gemessen wurde, endete oder zweifelhaft war, und die Linien wurden dann gestrichelt; für manche Punkte wurde auch die Variation blosz als positiv oder negativ eingetragen.

Die Isogonenkarte für 1540 musz noch verbessert werden nach den Beobachtungen von João de Castro auf seiner Reise von Lissabon nach Goa von de Andrade Corvo im Jahre 1882 publizirt. Diese Publication ist mir erst kürzlich bekannt geworden und augenblicklich noch nicht zugänglich. Die Variations-Curven der Uebersichtskarte für den Süd-Atlantischen und Indischen Ocean werden sich dann vermuthlich auch anders gestalten. Darum habe ich bei den Karten für 1540 und 1580 die Linien gleicher Säkular-Variation in diesen beiden Oceanen fortgelassen, hoffe aber so bald wie möglich jenen fehlenden Theile anzufüllen und die aus meinen Karten folgenden Anschauungen auch über das 16te Jahrhundert auszudehnen.

Werthen der Declination sollen sie analog den Curven für die selbe Länge und 60° N.Br. gezogen werden.

Jahr.	60° O.L.	80° O.L.	Jahr.	60° O.L.	80° O.L.
1540	+ 2°.5	—	1800	— 7° ?	—
1580	+ 10	—	1830	— 14	— 18
1610	+ 21	+ 17½	1840	— 13 ?	— 18 ?
1665	+ 15 ?	—	1858	— 16	— 19 ?
1770	— 5 ?	—	1880	—	—
1787	— 5 ?	—	1885	— 17.5	— 23

In nebenstehender Tafel sind die Karten, mit Auslassung derer für 1710 und 1720, in verkleinertem Masstabe wiedergegeben.

Eine oberflächliche Betrachtung lehrt dasz die Variation in Allgemeinen mit der Breite wächst; es ist aber fraglich ob dies nicht nur von dem Anwachsen der Inclination herrührt.

Die magnetisch Ost-West Componente des Vectors der Säkular-Variation bekommt man, wenn man die Declinations-Variation mit der horizontalen Intensität multiplicirt, wofür aber nur für dieses Jahrhundert Data vorliegen. Die zweite Karte für 1880 enthält diese Linien, von welchen die Nullinien natürlich die gleichen geblieben sind.

Man sieht weiter wie das allgemeine Bild ungefähr dasselbe ist, und die Gleichmässigkeit der horizontalen Intensität in den tropischen Breiten verbürgt diese Uebereinstimmung für frühere Zeiten.

Als Grundlage für diese beide Karten für 1880 wurde nicht meine Uebersichtskarte der Säkular-Variation benutzt, sondern die Werthe der Säkular-Variation und die Horizontal-Intensität nach den Karten Neumayer's für 1885 und die Resultate von Schott für Nord-Amerika. Diese letzteren sind auch für die anderen Karten benutzt.

Das Gesammtbild der Karten zeigt weiter ein Gebiet westlicher Variation, das mit der Zeit westlich fortschreitet und gegenüber den anderen Gebieten ziemlich regelmässig gestaltet ist. Im Allgemeinen sind die Werthe im südlichen groszen Ocean klein. Die Karten mögen jetzt kurz in chronologischer Reihefolge besprochen werden.

In 1540 zeigt sich ein secundäres Gebiet östlicher Variation über Europa, das in 1580 schon stark abgenommen hat, und in 1610 verschwunden ist. Dagegen zeigt sich dann bei New-Foundland ein neues Gebiet.

Das Gebiet westlicher Variation zeigt sich deutlich; vermuthlich war es in 1540 und 1580 auch schon da, die Beobachtungen von João de Castro werden mir hoffentlich darüber Aufschlusz geben.

In 1640 sind zuerst die Linien in dem Pacifischen Ocean gezeichnet, natürlich sind sie aber sehr zweifelhaft. Merkwürdig ist es dasz sich 4 Gebiete abwechselend östlicher und westlicher Variation zeigen; in 1665 ist solches noch deutlicher; auch in 1680.

In 1700 tritt eine Verbindung zwischen den Gebieten des Atlantischen und Pacifischen Ocean im südlichen Theil des Indischen Oceans auf. In 1730 eine zweite über Asiën. Diese letzte steht in Zusammenhang mit dem sogenannten Petersbürger Minimum. Das Oval bei Britisch-Indien gehört auch zu dieser secundären Welle. In 1880 ist dieses Oval verschwunden und hat sich die Nullinie vom Ural bis Amerika herumgeschwungen.

Bei der Uebersichtskarte der Säkular-Curven habe ich auch die Isoextremen gezeichnet, und dabei besonders auf primäre und secundäre Wellen Acht gegeben; es ist deutlich dasz diese Isoextremen mit den Nullinien dieser Karten zusammenfallen müssen, und dasz die Unterschiede zwischen beiden Systemen von der verschiedenen Ableitung herrühren. Die Nullinien sind mehr in Harmonie mit der Gesammtheit der Säkular-Variation gezeichnet und haben darum einen mehr wesentlichen Werth, auch sind sie zahlreicher, weil die Isoextremen nur für zwei Wellen gezogen sind. In 1880 stimmen sie untereinander, nur wird die Nullinie weiter verfolgt. Die Nullinie für 1780 in Asien ist mit der Isoextremen für 1770 zu vergleichen, wobei es auffällt, wie die Nullinie interessanter und genauer ist. Dasselbe ist der Fall mit den Linien westlich von Amerika für 1880. Die Nullinien sind jetzt durch heranziehen der SCHOTT'schen Resultaten besser als die Isoextremen. Die merkwürdige Ausbiegung zeigen die Isoextremen auch nicht.

Die Nullinien müssen die Isoextremen ersetzen Die grosze Bedeutung eines solchen Gesammtbildes für die Declination allein wird durch Folgendes deutlich.

Wenn man in dem jetztigen System der magnetischen Vectoren an der Erdoberfläche merkwürdige Erscheinungen und critische Punkte gefunden hat, kann man suchen, welche Besonderheiten die Declinations-Linien da zeigen. Diese Besonderheiten verfolgt man weiter in der Zeit zurück und schlieszt dann umgekehrt auf die critischen Punkte für Zeiten als noch keine Inclinationen und Intensitäten bekannt waren.

Von TILLO [1]), von BEZOLD [2]) und BAUER [3]) haben dieses Jahr neue Thatsachen an's Licht gebracht, welche dazu Anlasz bieten. Die mittleren Werthe der magnetischen Elemente der verschiedenen Parallelen spielen dabei ein Hauptrolle und brachten u.a. das Gesetz, dasz die Tangente der mittlere Inclination gleich der doppelten Tangente der Breite sei: $tg\, I = 2\, tg\, \varphi$. BAUER hat mittelst dieses Gesetze die isapoclinischen Linien für 1885 und 1780 gezeichnet.

Als Resultat fand er, dasz die Magnetisirung der Erde, als die Summe zweier Magnetisirungssystemen auf zu fassen sei; das Eine mit den Polen in der Erdachse, das Andere senkrecht auf dem ersten mit den Polen ungefähr im Aequator. Für 1780 fand er den Süd-Pol bei Britsch Indiën, den Nordpol westlich von Brasiliën; für 1885

[1]) C. R. 8 Oct. '94 und 8 Juli '95.

[2]) Sitz. Ber. d. Berliner Akademie 4 April '95.

[3]) Americ. Journ. of Science, Vol. L. Art. XII, XX, XXXV.

resp. bei Zanzibar und Rio de Janeiro; wasz also auf ein westliches Fortschreiten hinweist und einigermassen eine Erklärung für der Säkular-Variation zu sein scheint.

Die Pole liegen in der Nähe des Aequators; ihre Bewegung ist verschieden. Die mittlere Bewegung der Pole beträgt 360° in 1860 Jahren, der Agonen in 2000 Jahren.

Bauer hebt schon hervor welchen Einflusz die Nähe der Pole auf die Säcular-Variation der Declination haben musz, und ohne weiteres ist es deutlich, dasz die Variation in Declination am gröszten in jenen Gegenden musz sein, wo der Pol passirt; westliche Variation beim positiven Pol und umgekehrt, während die Nullinie der Variation zwischen beiden Polen hindurch gehen musz. Darum habe ich in meinen Karten Linien durch die Punkte gezogen wo die Variationen am gröszten war und ich will sie kurz als Kammliniën bezeichnen.

Die zwei Kammliniën für 1880 sind mit genügender Schärfe zu ziehen und sie bleiben auch ungefähr Kammlinien in der andere Karte für 1880, welche die Verteilung der Ost-West Componente des Variations-Vectors zeigt. Die Atlantische Kammlinie bleibt bis 1640 deutlich, in 1640 aber fängt sie an sich zu theilen. Die Indische ist in 1760 von dem Oval gestört, hebt sich in 1730 wieder hervor um in 1640 abermals undeutlich zu werden.

Auf den Karten sind weiter die Agonen und die secundären Pole van Bauer angegeben.

Ein einfache Betrachtung der Karten van 1880 und 1780 lehrt nun die wichtige Thatsache, dasz die Pole wirklich auf der Kammlinie liegen und dasz Agone und Kammlinie auch weiterhin nahe bei einander bleiben. In 1780 ist die Indische Agone sehr unregelmässig geworden und auch die Kammlinie vermischt, und diese Unregelmässigkeit zeigt sich in früheren Zeiten gleichfalls.

Die Atlantische Agone bleibt westlich von der Kammlinie, die Indische östlich.

Das Fortschreiten beider Linien wird uns noch besser, als die Bewegung der Agonen allein, über den Gang der secundären Polen belehren können.

Es lehrt uns zuerst, dasz es sich hier um einen Vorgang handelt, welcher sich durch untergeordnete Erscheinungen unregelmässig gestaltet.

Besonders in den Indischen Gegenden treten diese Unregelmässigkeiten stark auf; eine fortwährende westliche Bewegung bleibt jedoch nicht zu verkennen.

Die Aenderung in der Länge des Schnittpunktes der Kammlinie

mit dem Aequator lässt sich für beide in einer lineären Formel ausdrücken. Graphisch fand ich:

$$\lambda_w = + 36^0 + 0^0.244 \ (A - 1850)$$
$$\lambda_e = - 46^0 + 0^0.189 \ (A - 1850)$$

Mit diesen Formeln werden die Differenzen zwischen den aus den Karten gezogenen und berechneten Längen:

Jahr.	λ_w (ber.—beob.)	λ_e (ber.—beob.)	Jahr.	λ_w (ber.—beob.)	λ_e (ber.—beob.)
1610	-1^0	-9^0	1710	$+3^0$	-12^0
1640	+6	+5	1720	+5	−10
1665	−8	0	1730	+7	+7
1680	−4	+2	1780	0	?
1700	0	−4	1880	0	0

Die Differenzen sind, weil die Bestimmung der Länge der Schnittpunkte bis 10^0 und mehr unsicher sein kann, klein, und die jährlichen Bewegungen van $0^0.244$ und $0^0.189$ können einiges Zutrauen beanspruchen.

Für die Schnittpunkte der Agonen mit dem Aequator leitet BAUER die Formeln ab:

$$\lambda_w = + 50^0.6 + 0^0.228 \ (A - 1850)$$
$$\lambda_e = - 83^0.0 + 0^0.139 \ (A - 1850).$$

Die Zahl $0^0.139$ weicht ziemlich stark von $0^0.189$ ab, aber die Bewegung der östlichen Agone ist auch sehr unregelmässig.

Uebereinstimmung herscht aber in der Hinsicht, dasz die Bewegung im Osten langsamer ist, wie im Westen, während BAUER für den östlichen secundären Pol grade das Umgekehrte findet. Die Bewegung des östlichen Poles erleidet, scheint mir, grade um die Zeit von 1780 eine Unregelmässigkeit, sodasz die Bestimmung seiner Bewegung nicht für längere Zeit gelten darf.

Zwischen den drei Zahlen für die mittlere Bewegung, welche mehr Werth haben als diejenige für die absonderlichen, (für die Pole $0^0.194$; für die Agonen $0^0.184$; für die Kammlinien $0^0.217$), herscht eine merkwürdige Uebereinstimmung.

Und wenn die Bewegung der Agonen von derselben Ursache herrührt, wie die Bewegung der Kammlinien, dann hat die Zahl $\frac{1}{2}$ ($0^0.217 + 0^0.184) = 0^0.200$, also das Mittel beider Bewegungen noch grösseren Werth. Sie deutet auf eine Dauer von 1800 Jahre für die Umkreisung der Erde.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt voor de Verhandelingen der Afdeeling aan 1°. een manuscript van den Heer L. H. SIERTSEMA, getiteld: *„Over de onbestaanbaarheid van diamagnetische stoffen volgens* DUHEM, *en eenige minimum-eigenschappen in het magnetisch veld"*; en 2°. een manuscript van den Heer Dr. C. H. WIND, getiteld: *„Eene studie over de theorie der magneto-optische verschijnselen, in verband met het Hall-effect"*.

Tot adviseurs over beide verhandelingen worden door den Voorzitter aangewezen de Heeren LORENTZ en VAN DER WAALS.

— De Vergadering wordt gesloten.

E R R A T A.

Op blz. 146 regel 24 staat 1 cM^3, hiervoor te lezen 2 cM^3.

" " 147 " $\varrho = 41.6\, \rho$ " " " $\varrho = 41.7\, x$.

Deze gelegenheid grijpt de schrijver aan om ook Prof. H. C. DIBBITS zijnen hartelijken dank te betuigen, voor de groote welwillendheid en steun, die hij van Z.H.Gel. mocht ondervinden.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN.

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 28 December 1895.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer C. A. J. A. OUDEMANS.

Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

Kennisgevingen van de Heeren LORENTZ, HOOGEWERFF, SURINGAR en ENGELMANN, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

— De Commissie van beoordeeling over de verhandelingen der Heeren SIERTSEMA en WIND is met haar verslag nog niet gereed, doch hoopt zich in de Januari-zitting van den haar opgedragen last te kwijten.

Wiskunde. — De Heer W. KAPTEYN handelt *„over een vraagstuk uit de Analysis situs"*.

Verdeelt men een $p + 1$-voudig samenhangend oppervlak op willekeurige wijze in een aantal aaneensluitende enkel samenhangende veelhoeken wier zijden rechte of kromme lijnen zijn, dan staat het aantal dezer veelhoeken V steeds in eenvoudig verband met het aantal hoekpunten H en het aantal zijden of grenzen G dezer veelhoeken. Dit verband wordt uitgedrukt door de vergelijking

15

$$V + H - G = 2\,(1 - p)$$

waaraan somtijds de naam van „het theorema van LHUILIER" wordt gegeven [1]).

Beginnen we, om deze stelling te bewijzen, met de beschouwing van een bol die als model voor ieder enkel samenhangend oppervlak kan worden aangenomen. De zijden der veelhoeken op dezen bol kunnen dan, zonder dat dit invloed heeft op de getallen V, H of G, vervangen worden door bogen van groote cirkels, zoodat het oppervlak van den bol nu in een aantal aaneensluitende bolveelhoeken verdeeld is. Nu is de inhoud i_n van een bol n-hoek

$$i_n = [P_n - (n - 2)\,\pi]\,\frac{O}{4\,\pi}$$

waarin P_n de som der polygoonshoeken en O het oppervlak van den geheelen bol voorstelt. Sommeert men deze vergelijking over alle veelhoeken, dan ziet men dat

$$\Sigma i_n = O, \quad \Sigma\, P_n = 2\,\pi\, H, \quad \Sigma\, n = 2\, G, \quad \Sigma\,(n - 2) = 2\,(G - V)$$

waaruit terstond volgt

$$V + H - G = 2.$$

Gaan we nu dezelfde methode toepassen op het algemeene geval waar het oppervlak een $p + 1$-voudig samenhangend oppervlak is. Voor dit geval nemen we als model een gesloten oppervlak met p openingen. De doorsnede met het vlak van teekening denken we ons te bestaan uit een cirkel met p gelijke cirkelvormige openingen wier middelpunt, in de hoekpunten van een regelmatigen veelhoek liggen waarvan het middelpunt met dat van den eersten cirkel samenvalt. Voorts stellen we ons voor dat dit oppervlak symmetrisch is ten opzichte van het vlak van teekening en ter weerszijde daarvan een raakvlak bezit, waarvan de aanrakingskromme bestaat uit een cirkelomtrek met p stralen die den omtrek in p gelijke deelen verdeelen. Het is duidelijk dat deze beperking geen invloed kan hebben op het resultaat dat we wenschen te verkrijgen, alsook dat hierbij stilzwijgend is aangenomen dat $p > 2$. Is toch $p = 1$ of $p = 2$ dan kunnen de middelpunten der openingen niet meer in de hoekpunten van een regelmatigen veelhoek liggen; in het eerste geval onderstellen we dat het middelpunt van de opening met het middelpunt van den eersten cirkel samenvalt, en in het

[1]) FORSYTH, Theory of Functions p. 325.

tweede dat de beide middelpunten der openingen diametraal tegenover elkander liggen op gelijken afstand van het middelpunt van den eersten cirkel. In het eerste geval bestaat dan de aanrakingskromme van het raakvlak waarvan boven sprake was uit één, in het laatste geval uit twee elkaar rakende cirkels binnen een grooteren cirkel gelegen.

Denken we dit oppervlak op willekeurige wijze in veelhoeken verdeeld, dan kunnen we ook hier, evenals bij den bol, zonder de drie getallen V, H en G te veranderen, onderstellen dat de grenzen of zijden der veelhoeken geodetische lijnen op het oppervlak zijn. Nu geldt, volgens Gauss, voor elken geodetischen n-hoek

$$\int\int \frac{d\sigma}{R\,R'} = P_n - (n-2)\,\pi$$

waarin R en R' de hoofdkromtestralen van het oppervlak zijn, de integraal zich uitstrekt over alle elementen $d\sigma$ van den n-hoek, terwijl P_n, als vroeger, de som der polygoonshoeken van den n-hoek voorstelt. Het eerste lid dezer vergelijking, dat men de totale kromming van den veelhoek noemt, is negatief wanneer de beide kromtestralen ongelijk teeken bezitten, wanneer dus het eene krommingsmiddelpunt op de inwendige, het andere op de uitwendige normaal ligt. Sommeert men nu de vorige vergelijking voor alle veelhoeken, dan verkrijgt men, evenals in het eerste geval,

$$\int\int \frac{d\sigma}{R\,R'} = 2\,\pi\,(V + H - G)$$

waarin nu de integraal zich uitstrekt over het geheele $p+1$-voudig samenhangende oppervlak. Merken we nu op dat Gauss heeft aangetoond dat $\frac{d\sigma}{R\,R'}$, gelijk is aan het oppervlak ds, dat uit een bol, die met de eenheid als straal beschreven is, uitgesneden wordt door de stralen, die evenwijdig getrokken worden aan de normalen op het oppervlak in de punten op den omtrek van het element $d\sigma$.

We kunnen dus schrijven

$$\frac{d\sigma}{R\,R'} = ds$$

mits we aan ds of de spherische waarde van $d\sigma$ negatieve waarden toekennen indien de beide kromtestralen van teeken verschillen. Voor de bepaling van de waarde de integraal over het geheele oppervlak, denken we dit verdeeld in $p+1$ deelen. Het eerste is het ringvormige deel, dat ligt buiten de cirkelvormige aanrakings-

krommen van de beide raakvlakken waarvan hierboven werd gesproken; het overige van het oppervlak verdeelen we in p congruente deelen, die ieder begrensd worden door de omtrekken van twee correspondeerende sectoren van de aanrakingskrommen in de beide raakvlakken. Ingeval $p = 1$ of $p = 2$, gaan deze laatste deelen in een of twee ringvormige deelen over.

Op het eerste deel zijn de kromtestralen steeds positief, terwijl de normaal, behalve op de grens waar alle normalen evenwijdig zijn, alle mogelijke standen éénmaal aanneemt. Hieruit volgt dat de waarde der integraal of de spherische waarde van dit deel juist gelijk is aan het oppervlak 4π van den eenheidsbol. Om de waarde van de integraal voor elk der overige deelen te bepalen, merke men op dat in ieder punt de kromtestralen van teeken verschillen, terwijl de normaal eveneens, behalve op de grenzen, alle mogelijke standen éénmaal aanneemt. De spherische waarde van elk dezer laatste deelen is dus -4π. De waarde der integraal voor het geheele oppervlak is dus $4\pi(1-p)$; men heeft dus

$$4\pi(1-p) = 2\pi(V+H-G)$$

of

$$V+H-G = 2(1-p).$$

Wiskunde. — De Voorzitter biedt voor de werken der Afdeeling aan eene verhandeling van den Heer J. W. RASCH te Nijmegen, getiteld: „De meting van den cilinder, waaruit het kilogram is afgeleid". Hij stelt haar in handen van de Heeren J. A. C. OUDEMANS en SCHOLS om daarover verslag uit te brengen in de Januarizitting.

Physiologie. — De Heer PEKELHARING biedt voor de werken der Afdeeling aan eene verhandeling van den Heer Dr. H. J. HAMBURGER te Utrecht, getiteld: „*Over den invloed van intraäbdominale drukking op de resorptie in de buikholte*". De Heeren ENGELMANN en PLACE worden aangewezen om daarover verslag uittebrengen.

Uit naam van den Heer SURINGAR wordt voor de Bibliotheek aangeboden een exemplaar van den 8sten druk van diens „Zakflora" en N°. 49 van „Eigen Haard", waarin hij onlangs een kort levensbericht in het licht gaf van den Secretaris. — Eindelijk wordt door den Voorzitter voor de boekerij aangeboden een exemplaar van zijne Getijtafels voor Hoek van Holland, 1896.

— De Vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN.

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 25 Januari 1896.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer C. A. J. A. OUDEMANS.

Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van den Heer HOOGEWERFF, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Brief (1 December 1895) van den burgemeester van Dole, tevens Voorzitter van het Comité tot oprichting van een gedenkteeken voor L. PASTEUR binnen zijne geboorteplaaats, ter begeleiding van eenige inteekenlijsten, waarop de Schrijver hoopt dat, ook door Nederlandsche geleerden, bijdragen ter beschikking zullen worden gesteld, als bewijs van instemming met de hulde, die men van voornemen is aan de nagedachtenis van den grooten natuuronderzoeker te brengen. De lijsten worden ter visie gelegd.

3°. Brief van de Royal Society (13 Januari 1896), waarin nader wordt aangedrongen op de benoeming van een afgevaardigde uit Nederland ter bijwoning van de internationale conferentie, binnen Londen bijeen te roepen, tot vaststelling van een plan waarnaar een volledige catalogus van wetenschappelijken werken en tijdschriften zou kunnen worden ontworpen. In hetzelfde schrijven wordt de wensch uitgesproken, dat de afgevaardigde moge voldoen aan sommige eischen, die met enkele woorden nader worden toegelicht.

De Voorzitter stelt voor, den brief ter kennisse te brengen aan Z.E. den Minister van Binnenlandsche Zaken met een begeleidend schrijven, waaruit blijke, dat die toezending niet zoo zeer bedoelt bij den Minister op spoed aan te dringen, als wel om Z.E. te wijzen op de eigenschappen welke, volgens de Royal Society, aan den afgevaardigde gesteld moeten worden. — Aldus wordt besloten.

4°. Brief van de Société Impériale Russe de Géographie (December 1895), de kennisgeving behelzend, dat het Genootschap den 2en Februari e.k. zijn 50-jarig bestaan hoopt te vieren.

Wordt besloten deze mededeeling met een adres van gelukwensching te beantwoorden.

5°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (9 Januari 1896), waarin wordt kennis gegeven, dat Z.E. de wijzigingen, welke de Afdeeling in Art. 16 van haar Reglement van Orde wenscht vastgesteld te zien, heeft goedgekeurd.

6°. Brief van den Minister van Justitie (22 Januari 1896) waarin de Afdeeling verzocht wordt door eene Commissie uit haar midden een onderzoek te doen instellen naar de gehoorigheid in de gevangenissen en, zoo mogelijk, met inachtneming van eenige nader omschreven eischen, de middelen aan te wijzen, om dat euvel te verminderen of uit den weg te ruimen.

Daar, tot het beantwoorden van de vraag, niet alleen met physische, maar ook met hygiënische en bouwkundige eischen rekening moet worden gehouden, wenscht de Voorzitter dat aan de Commissie worden deelgenomen door de Heeren VAN DER WAALS, LORENTZ, KAMERLINGH ONNES, FORSTER en VAN DIESEN. De Heer VAN DER WAALS wenscht enkele dagen uitstel alvorens zijn antwoord mede te deelen op de vraag of hij het lidmaatschap der Commissie aanneemt. De Heeren LORENTZ, KAMERLINGH ONNES en VAN DIESEN, nemen de benoeming aan. Aan den Heer FORSTER, niet ter vergadering tegenwoordig, zal daarvan kennis worden gegeven.

7. Brief van P. HEITLAGER (20 Januari 1896) de mededeeling behelzend, dat hij zich voorstelt, het vraagstuk der luchtvaart tot nadere oplossing te kunnen brengen. Hij vraagt of de Akademie

het lichaam niet zou wezen, waaraan hij zijne denkbeelden ter toetsing zou kunnen voordragen.

De Voorzitter wijst er op, dat de Schrijver in Juli 1891 een soortgelijken brief tot de Afdeeling richtte, doch die betrekking had op de Quadratuur van den cirkel. Toen werd hem de raad gegeven, zich tot een degelijk natuurkundige te wenden. en de zaak met dezen te bespreken, omdat de Afdeeling besloten had de Quadratuur des cirkels van hare discussiën buiten te sluiten. Aan dien wenk had hij voldaan, met het gevolg, dat hij van de onmogelijkheid der oplossing van bedoeld vraagstuk overtuigd werd.

De Voorzitter meent, dat het evenmin op den weg der Afdeeling ligt, zich met het vraagstuk der Luchtvaart bezig te houden, en zou wenschen dat den Schrijver hetzelfde antwoord als vroeger gegeven werd, n.l. om zich tot een deskundige te wenden en dezen met zijne denkbeelden bekend te maken. De Vergadering vereenigt zich met deze zienswijze en de brief zal dus in bedoelden geest beantwoord worden.

Aardkunde. — De Heer VAN BEMMELEN brengt het Jaarverslag over 1895 uit der Geologische Commissie en legt rekening en verantwoording af van zijn beheer. Het verslag luidt als volgt:

Wij hebben de eer aan de Akademie het volgende Verslag onzer verrichtingen over het afgeloopen jaar 1895 uit te brengen.

Van grootere of kleinere grondwerken in onzen bodem, die tot een onderzoek of tot inzameling van aardmonsters aanleiding konden geven, is in dit jaar geenerlei bericht of mededeeling tot ons gekomen.

Van de „Mededeelingen omtrent de Geologie van Nederland, verzameld door de Commissie voor het Geologisch onderzoek" zijn in de eerste helft dezes jaars twee nummers verschenen n°. 17 en 18, die werden opgenomen in de Verhandelingen der Akademie 2e Sectie Deel IV n°. 3 en n°. 4. Zij bevatten de verhandelingen, die wij op het einde des vorigen jaars u hebben aangeboden, te weten:

Dr. H. VAN CAPPELLE: „Diluvialstudien im Sudwesten von Friesland".

Dr. J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK: „Bijdrage tot de kaarteering onzer zandgronden".

In de Maartvergadering hebben wij U eene verhandeling van Dr. VOGEL, tijdelijk assistent aan het Geologisch Museum te Leiden, aangeboden over Nederlandsche Versteeningen uit de Krijtperiode, aanwezig in het Leidsch Geologisch Museum. Deze verhandeling

is opgenomen in de Verhandelingen der Akademie 2e Sectie Deel IV n⁰. 7.

Dr. H. van Cappelle zette dezen zomer zijne nasporingen in het Nederlandsch diluvium voort, ditmaal in Utrecht en de Veluwe. Zijn hoofddoel was het opsporen van eene vroegere gletscherbedekking. Hij achtte daartoe een voorafgaand onderzoek noodig naar den bouw en de samenstelling der heuvelrij, die het oostelijk deel van Utrecht in W.N.W. richting doorsnijdt, omdat noordelijke gesteenten hier talrijk zijn. Hij onderzocht daarna het heuvel-zandgebied, dat overal aan den voet der hooge grinthoogten ontwikkeld wordt gevonden. Dit bleek, evenals in het Z.W. van Friesland uit zand van verschillenden ouderdom opgebouwd te zijn.

Dr. van Cappelle heeft dit onderzoek tevens aan de toekomstige samenstelling eener nieuwe Geologische kaart van Nederland dienstbaar gemaakt, door daaruit regels af te leiden, welke bij eene hernieuwde kaarteering van het Diluvium zullen in acht te nemen zijn. Hij hoopt het uitvoerige verslag zijner onderzoekingen over niet langen tijd te kunnen indienen.

Dr. J. L. C. Schroeder van der Kolk heeft in dit jaar zijn onderzoek over de kaarteering onzer zandgronden voortgezet. De waarde der door hem gebezigde methode van analyse van zandmonsters, om daardoor in korten tijd en met geringe moeite de afkomst en het karakter der zandlagen op te sporen, is door hem nader onderzocht en getoetst. Hij heeft daarvoor het mikroskopisch-mineralogisch onderzoek ingesteld van de zware mineralen, die hij bij bovengenoemde analysen van allerlei zandmonsters had verkregen. De door hem verkregen uitkomsten zal hij in eene tweede verhandeling mededeelen.

Dr. Schroeder van der Kolk heeft nog een tweede onderzoek ondernomen. Zooals bekend is, werd door Rijks-ingenieurs van den Waterstaat in 't begin dezes jaars met de stoomboot „Cruquius" een aanvang gemaakt met de opneming der Zeekust benoorden den nieuwen Waterweg, ten einde te onderzoeken of, in verband met de afneming van het strand, de diepte van de Noordzee onze kust nadert. Daartoe is eene reeks van peilingen verricht, waarvan men de voortzetting mag verwachten, daar zij in hooge mate wenschelijk is om daaruit de vormveranderingen van den bodem der Noordzee langs onze kust te leeren kennen.

Dr. Schroeder van der Kolk heeft proefjes van de daarbij op zijn verzoek verzamelde monsters grond ontvangen, en reeds een gedeelte daarvan (van 2 Raaien afkomstig) naar zijne methode onderzocht. Hij stelt zich voor uit de bepaling van korrelgrootte en ge-

halte aan zware mineralen gegevens af te leiden omtrent aanspoeling en wegspoeling van grond (op de vindplaatsen), die de oorzaken kunnen zijn van veranderingen in de helling en diepte van het onderzeesche strand, en die wellicht eenige aanduiding kunnen geven omtrent de richting der grondverplaatsingen. Zijne voorloopige uitkomsten heeft hij ons medegedeeld. De einduitkomsten zullen eerst later voor publicatie vatbaar zijn. Belangstellend zien wij de voortzetting van zijn onderzoek te gemoet.

De Heer Ingenieur L. VAN KRIMPEN te Leeuwarden heeft een kistje met monsters aarde toegezonden, die afkomstig zijn uit het kanaal, dat in het vorige jaar tusschen Leeuwarden en de Tijnje gegraven is. Dr. VAN CAPPELLE heeft reeds vroeger een plaatselijk onderzoek omtrent de daarbij doorsneden aardlagen ingesteld en een kort verslag daarover ingezonden, zooals wij in het Jaarverslag over 1894 hebben medegedeeld.

In de Verhandelingen der Akademie (Deel III n°. 1, 1895) heeft de derde ondergeteekende een onderzoek medegedeeld over de samenstelling, het voorkomen en de vorming van de witte klien (siderose) en het vivianiet in de onderste darglaag der hoogveenen van Zuid-Oost-Drenthe, waarvoor hij een plaatselijk onderzoek in het Emmer Compascuum had ingesteld. Hij heeft daarin den wensch geuit, dat dit plaatselijk onderzoek mocht voortgezet en uitgebreid worden, vóór dat die streek verder zou afgeveend zijn. Dr. C. HOITSEMA heeft dezen zomer daarmede een aanvang gemaakt, en ons een voorloopig verslag overgelegd. Den volgenden zomer hoopt hij het plaatselijk onderzoek dezer vorming voort te zetten.

Ten slotte hebben wij de eer U voor te stellen:

1°. Aan de Heeren VAN CAPPELLE en SCHROEDER VAN DER KOLK den dank te betuigen voor hunnen belangeloozen arbeid ter vermeerdering onzer geologische kennis van Nederland.

2°. Aan Zijne Excellentie den Minister van Binnenlandsche Zaken opnieuw eene Toelage van *f* 500.— voor het Geologisch onderzoek over 1897 aan te vragen.

De Commissie voor het Geologisch Onderzoek van Nederland:

G. VAN DIESEN,

's Gravenhage, } Januari 1896. K. MARTIN,
Leiden, }

J. M. VAN BEMMELEN,
Secretaris.

De beide voorstellen der Commissie worden aangenomen.

Natuurkunde. — De Heeren LORENTZ en VAN DER WAALS brengen het volgende verslag uit over de verhandeling van den Heer Dr. L. H. SIERTSEMA: „*Over de onbestaanbaarheid van diamagnetische stoffen volgens* DUHEM, *en eenige minimum-eigenschappen in het magnetisch veld.*"

De in onze handen gestelde verhandeling van den Heer SIERTSEMA bestaat, zooals in den titel is uitgedrukt, uit twee vrij wel op zichzelf staande deelen. Aanleiding tot het eerste gaf eene beschouwing van DUHEM over magnetisch induceerbare lichamen. Deze natuurkundige paste daarop zijne theorie van den thermodynamischen potentiaal toe en kwam tot het besluit dat deze grootheid een maximum zou zijn als eene stof, waarvoor de verhouding tusschen de magnetische kracht en de magnetisatie door een negatief getal wordt voorgesteld, in een magnetisch veld den toestand aanneemt, die door de gewone vergelijkingen bepaald wordt. Daaruit zou volgen dat het evenwicht labiel is; derhalve kunnen volgens DUHEM lichamen met eene negatieve magnetische susceptibiliteit, *ware* diamagnetische lichamen, niet bestaan en moet het gedrag van eene stof als bismuth hieruit verklaard worden dat hare susceptibiliteit wel is waar positief is, maar kleiner dan die van het omringende medium.

De Heer SIERTSEMA heeft de waarde van deze bewering aan een onderzoek onderworpen. Voor een oogenblik volgt hij daarbij nog den Franschen natuurkundige door van den thermodynamischen potentiaal te spreken, maar weldra ontdoet hij zijne redeneeringen van dit kleed, dat trouwens ook bij DUHEM in dit geval niet veel meer is dan een uiterlijk sieraad, en beschouwt verder eenvoudig de potentieele energie van het stelsel. Hij doet zien dat DUHEM in den grond der zaak slechts heeft aangetoond dat de oude theorie van POISSON, of eene daarmede gelijkstaande beschouwingswijze, voor diamagnetische lichamen niet mag worden aangenomen, tenzij men zich uit de moeilijkheid wil redden door de bovengemelde hypothese over de omringende middenstof.

Zooals de schrijver terecht opmerkt valt in de theorie van MAXWELL de vraag naar de stabiliteit van het evenwicht in den zin, waarin zij door DUHEM gesteld is, weg.

Neemt men de theorie van POISSON aan, dan moet men zich voorstellen dat in den evenwichtstoestand het arbeidsvermogen van plaats een minimum is. Het is wel te verwachten dat ook in de tegen-

woordige theorie der electrische en magnetische verschijnselen eene grootheid zal kunnen worden aangewezen, die in den evenwichtstoestand een minimum is.

In het tweede gedeelte van zijn opstel behandelt Dr. SIERTSEMA eene dergelijke grootheid en gaat na in welke gevallen en met betrekking tot welke veranderingen zij de gewenschte eigenschap heeft. Daarbij komen twee gevallen ter sprake; in het eerste wordt het magnetisch veld door enkel permanente magneten zonder stroomen, in het tweede door enkel stroomen zonder permanente magneten teweeggebracht.

Het bestaan der minimum-eigenschap wordt niet uit eenig algemeen beginsel der mechanica of thermodynamica afgeleid, maar uit de fundamenteele vergelijkingen, die dit gebied van verschijnselen beheerschen, zeker wel de veiligste weg, daar deze vergelijkingen goed bekend zijn, maar aan eene mechanische of thermodynamische theorie nog groote moeilijkheden zijn verbonden. Het gegeven bewijs is beperkt tot die isotrope lichamen, bij welke de magnetische inductie evenredig is met de magnetische kracht.

Het onderzoek wordt besloten door een paar gevolgtrekkingen. De invloed van een para- of diamagnetisch lichaam op den loop der krachtlijnen wordt uit de minimumstelling afgeleid; eveneens kunnen daaruit de bekende grensvoorwaarden, die aan het oppervlak van zoodanig lichaam gelden, worden verkregen.

Wij hebben thans de eer, de opneming van de verhandeling in de werken der Afdeeling voor te stellen. Wellicht zullen een paar bedenkingen, die bij ons zijn gerezen en die wij gaarne aan den schrijver zullen mededeelen, hem aanleiding geven tot eenige wijziging. Eene dezer opmerkingen betreft de physische beteekenis der functie die in den evenwichtstoestand een minimum wordt. Ofschoon de bewezen stellingen wiskundige gevolgen zijn van de grondvergelijkingen van het vraagstuk en men zich zoowel bij de afleiding als bij de toepassing met eene zuiver mathematische opvatting kan tevreden stellen, zou toch, naar het ons voorkomt, de verhandeling in belangrijkheid winnen, zoo iets nader kon worden aangewezen, hoe de bedoelde functie met het arbeidsvermogen van het stelsel samenhangt.

H. A. LORENTZ.

J. D. VAN DER WAALS.

De conclusie van het rapport wordt goedgekeurd.

Natuurkunde. — De Heeren LORENTZ en VAN DER WAALS brengen het volgende verslag uit over de verhandeling van den Heer Dr. C. H. WIND: *„Eene studie over de theorie der magneto-optische verschijnselen, in verband met het Hall-effect"*.

Zooals bekend is was gedurende langen tijd de door FARADAY ontdekte electromagnetische draaiing van het polarisatievlak het eenige bekende verband tusschen de electrische en de optische verschijnselen. Het denkbeeld lag intusschen voor de hand dat een lichaam, waarin dit verschijnsel bestaat, in een magnetisch veld het gepolariseerde licht op eenigszins andere wijze zou terugkaatsen dan gewoonlijk; immers, men wist reeds dat elke bijzonderheid in de wijze, waarop het licht zich *in* eene stof voortplant, zich afspiegelt in de eigenschappen van het door die stof *gereflecteerde* licht. Wel stond het te vreezen dat deze nieuwe invloed van magnetische krachten bij de door FARADAY onderzochte doorschijnende lichamen al te zwak zou zijn, maar men mocht verwachten, zooals naderhand door proeven van KUNDT bevestigd is, dat ijzer, nikkel en kobalt de electromagnetische draaiing in veel hoogere mate zouden vertoonen dan even dikke lagen flintglas of zwavelkoolstof en dat dus bij spiegels, uit deze metalen vervaardigd, een invloed eener magnetisatie op het teruggekaatste licht zou kunnen worden aangetoond.

Het is ongetwijfeld een gedachtengang als de bovenstaande geweest, die KERR te Glasgow in 1877 tot zijne belangrijke proeven gebracht heeft. Hij vond de voorspelde werking zoowel wanneer de magnetisatie loodrecht staat op het spiegelende oppervlak, als wanneer zij evenwijdig daaraan gericht is, d. w. z. in de gebruikelijke terminologie bij polaire, zoowel als bij aequatoriale terugkaatsing.

Is het invallende licht loodrecht op het invalsvlak gepolariseerd en verkeert dus, bij afwezigheid van magnetische krachten, het teruggekaatste licht in hetzelfde geval, dan ontstaat in dezen bundel door de magnetisatie eene nieuwe component, de „magnetische" component, die evenwijdig aan het invalsvlak gepolariseerd is.

Iets dergelijks heeft plaats als het polarisatievlak der invallende stralen met het invalsvlak samenvalt.

Langs experimenteelen weg moesten nu in verschillende gevallen de amplitudo en de phase der magnetische component bepaald worden. Op de waarnemingen van KERR volgden die van den Heer KAZ te Amsterdam, die het eerst de later veel gebruikte methode der nul- en minimum-draaiingen toepaste; later werd door RIGHI,

Sissingh, du Bois en Zeeman een rijk materiaal bijeengebracht. Ook de Heer Wind zelf heeft aan deze metingen deelgenomen.

Nadat inmiddels Fitzgerald eene eerste poging tot eene theorie beproefd had, ontwikkelde de eerste ondergeteekende eenige beschouwingen, die door den Heer van Loghem werden uitgewerkt. Daarbij werd het verschijnsel van Kerr in verband gebracht met de door Hall te Baltimore verrichte waarnemingen over den invloed van magnetische krachten op den loop van electrische stroomen in dunne metaalbladen. Men kon na deze ontdekking aldus redeneeren. Als het licht bestaat in electrische trillingen en als een magneet den loop van electrische stroomen wijzigt, zal hij waarschijnlijk ook op de lichttrillingen een invloed hebben. Inderdaad was het voldoende, de differentiaalvergelijkingen der lichttheorie in een eenigszins gewijzigden, door het Hall-effect nader bepaalden, vorm te brengen om daaruit zoowel eene electromagnetische draaiing van het polarisatievlak als wat Kerr waargenomen heeft te zien voortvloeien.

De aldus opgebouwde theorie heeft in twee opzichten gefaald. Vooreerst hierin dat zij, indien men de waarde der in de formules voorkomende constante aan de metingen over 't verschijnsel van Hall ontleent, volstrekt niet het waargenomen bedrag van het Kerr-effect oplevert. Eene afwijking van de waarnemingen trouwens, die slechts bevestigt, wat zoo menigmaal is gebleken, dat men de optische constanten der lichamen niet of slechts bij benadering kan afleiden uit hun gedrag tegenover standvastige of langzaam wisselende electrische krachten.

In de tweede plaats leverde de theorie eene onjuiste waarde voor de *phase* der magnetische componenten. Toch was er in den aard van deze afwijking iets bemoedigends, dit nl. dat het verschil tusschen de waargenomen en de uit de theorie afgeleide phase bij elk metaal eene standvastige grootheid bleek te zijn, onafhankelijk van den invalshoek en zelfs van de richting der magnetisatie; eene grootheid, die men veelal het Sissingh'sche phaseverschil genoemd heeft. Nam men nu bovendien in aanmerking dat de verhoudingen tusschen de waarden, die de amplitudo der magnetische lichtcomponent in verschillende gevallen aanneemt, op bevredigende wijze door de theorie worden weergegeven, dan was het vermoeden gewettigd, dat eene wijziging van eenig onderdeel der theorie voldoende zou zijn om tot volkomen overeenstemming met de metingen te geraken. Die wijziging zou van zoodanigen aard moeten zijn dat *twee* van den aard van het lichaam afhankelijke constanten, ééne voor de amplitude en ééne voor de phase, in de formules werden gebracht.

De theorie van GOLDHAMMER, waarin twee constanten voorkomen, stemt voldoende met de waarnemingen overeen, terwijl DRUDE, die met ééne constante meende te kunnen volstaan, niet zoo goed geslaagd is.

De Heer WIND heeft thans een uitvoerig onderzoek aan de theorie der magneto-optische verschijnselen gewijd. Hij stelde zich daarbij ten doel: 1°. de theorie, zooals die door den eersten ondergeteekende en VAN LOGHEM was opgesteld, te doen aansluiten aan de bewegingsvergelijkingen der electriciteit in den eenvoudigen vorm die daaraan door HEAVISIDE en HERTZ is gegeven; 2°. aan de vergelijkingen zoodanige wijziging aan te brengen dat de waargenomen phasen er uit kunnen worden afgeleid, en 3°. zoo mogelijk van eene „mathematische beschrijving" op te klimmen tot iets, dat met meer recht eene „physische theorie" zou kunnen genoemd worden.

Wat het eerste punt betreft, moet worden opgemerkt dat de beschouwingen van VAN LOGHEM berusten op de bewegingsvergelijkingen van VON HELMHOLTZ, dat GOLDHAMMER de vrij ingewikkelde formules gebruikt, die oorspronkelijk door MAXWELL zijn opgesteld, terwijl ook de opvatting van DRUDE aanmerkelijk van die van den Heer WIND verschilt.

De wijziging die in de tweede plaats genoemd werd was gemakkelijk te vinden; desnoods zou GOLDHAMMER's voorbeeld hier den weg hebben kunnen wijzen. Het was voldoende, eene zekere reëele grootheid in de formules door eene complexe te vervangen, welke mathematische kunstgreep gelijk staat met de onderstelling dat tusschen oscilleerende electrische stroomen en de daardoor in een magnetisch veld opgewekte transversale electromotorische krachten een zeker *phaseverschil* bestaat. Na de invoering hiervan wordt de theorie verder uitgewerkt en hare overeenstemming met de waarnemingen bewezen. Dit gedeelte van het onderzoek is, behoudens het zooeven genoemde en enkele meer ondergeschikte verschilpunten, eene herhaling van de berekeningen van VAN LOGHEM. Toch achten wij het doelmatig dat dit alles uitvoerig is medegedeeld en niet door eene verwijzing naar VAN LOGHEM is bekort, daar het onderzoek van dezen alleen in zijne dissertatie is gepubliceerd.

Hoe de Heer WIND getracht heeft, zich van het complex zijn der bovengenoemde constante rekenschap te geven, werd reeds in het Zittingsverslag der Afdeeling, Deel III, p. 82, medegedeeld. Hij stelt zich voor dat de electrische stroom uit twee deelen, den „geleidingsstroom" en den „verplaatsingsstroom" is samengesteld en dat aan elk dezer deelen, zoo er eene uitwendige magnetische kracht

werkt, eene transversale electromotorische kracht beantwoordt, ieder met hare eigen constante. Inderdaad bereikt men op deze wijze het voorgestelde doel; hoe groot het SISSINGH'sche phaseverschil is, hangt eenvoudig af van de verhouding der twee zooeven genoemde constanten.

In het laatste gedeelte der thans aangeboden verhandeling doet de schrijver nog eene verdere poging tot physische verklaring. Stelt men zich voor dat bij een electrischen stroom positieve en negatieve deeltjes, hetzij dan deeltjes van „electrische stoffen", hetzij „ionen", zich in tegengestelde richting bewegen, dan toont men gemakkelijk aan dat het verschijnsel van HALL en wat daarmede samenhangt alleen dan kan bestaan, indien de snelheden der bewegingen *niet* even groot zijn. Toen, kort na het bekend worden der uitkomsten van HALL, BOLTZMANN daarop eene bepaling grondde van de stroomsnelheid der electriciteit, was dit dan ook in de onderstelling dat slechts de ééne electriciteit in beweging verkeerde, maar de andere in rust zou blijven.

Dr. WIND gaat nu uit van het in den laatsten tijd meermalen uitgesproken denkbeeld dat een electrische stroom bestaat in eene verplaatsing van ionen; door aan te nemen dat zulke zich bewegende deeltjes in een magnetisch veld de bekende kracht ondervinden en dat — evenals in electrolyten — de anionen en de kationen eene verschillende bewegelijkheid bezitten, komt hij werkelijk tot vergelijkingen, waarin een KERR-effect ligt opgesloten.

Deze proeve tot verklaring verdient zeker onder de oogen der natuurkundigen gebracht te worden, al is natuurlijk daarmede op verre na niet het laatste woord gezegd. Wij achten het van belang dat overwogen worde, in hoeverre deze verklaring in verband staat met of verschilt van de verklaringen die MAXWELL en anderen gegeven hebben van de electromagnetische draaiing van het polarisatievlak en die berusten op de hypothese der verborgen wentelende bewegingen in het magnetisch veld.

Wij zouden te breedvoerig worden, zoo wij den geheelen inhoud der verhandeling in bijzonderheden wilden weergeven. Slechts bij een paar punten wenschen wij nog stil te staan. Vooreerst onderzocht de schrijver in hoeverre men, zonder zijne toevlucht te nemen tot bijzondere theorieën, uit zekere algemeene beginselen iets over de bijzonderheden van het verschijnsel kan afleiden. Hetgeen Dr. WIND het symmetrie-principe en het beginsel der wederkeerigheid noemt blijkt voldoende te zijn om iets te voorspellen aangaande den aard

der werking in bepaalde gevallen en zelfs aangaande de numerieke betrekkingen tusschen de waarneembare grootheden.

Bij deze overwegingen kwam de schrijver tot eene onverwachte uitkomst. Men heeft tot nog toe gemeend dat eene magnetisatie loodrecht op de richting waarin zich het licht voortplant, zonder invloed zou zijn. De magnetische draaiing van het polarisatievlak is evenredig met den cosinus van den hoek tusschen den lichtstraal en de magnetische kracht en bij de proeven over het verschijnsel van Kerr, zoowel over de polaire als over de aequatoriale terugkaatsing, lag de richting der magnetisatie altijd in het invalsvlak van het licht. Het bleek nu echter dat de straks vermelde algemeene beginselen eene werking van eene magnetisatie, die loodrecht op het invalsvlak staat, geenszins uitsluiten, en nadat de schrijver zoo op het denkbeeld gekomen was kon hij gemakkelijk uit de bewegingsvergelijkingen afleiden dat de bedoelde werking bestaan moet, hoewel alleen dan, wanneer het invallende licht loodrecht op het invalsvlak gepolariseerd is. Wel is waar zal dan, na eene magnetisatie loodrecht op het invalsvlak, niet, zooals bij de proeven van Kerr, eene magnetische component optreden, die *in* het invalsvlak gepolariseerd is, maar de amplitudo en de phase van het loodrecht op dat vlak gepolariseerde teruggekaatste licht zullen gewijzigd worden.

Men kan dit ook beschrijven door te zeggen dat eene eveneens loodrecht op het invalsvlak gepolariseerde magnetische component ontstaat.

Het heeft Dr. Wind aan tijd en hulpmiddelen ontbroken om zijne voorspelling op de proef te stellen, maar hij heeft eene verificatie voorbereid door het bedrag der te verwachten werking te berekenen en eene waarnemingsmethode aan te geven. Hoewel het verschijnsel zwak zal zijn, is er kans dat het waargenomen zal kunnen worden, en de medegedeelde beschouwingen zijn van belang, hoe de proef ook uitvalle. Bestaat het verschijnsel niet, dan zal de noodzakelijkheid zijn aangetoond, de theorie der magneto-optische verschijnselen aan eene diepgaande herziening te onderwerpen. Wij zien in dit gedeelte der verhandeling het beste bewijs voor de scherpzinnigheid van den schrijver.

Is er, alles samengenomen, veel in het onderzoek, dat wij kunnen prijzen, het spreekt wel vanzelf dat wij niet alles geheel voor onze rekening zouden willen nemen. Bovendien kan, naar het ons voorkomt, in een enkel opzicht, de behandeling verbeterd worden. In § 3, bij de invoering van het begrip „electrische kracht", schijnt de Heer Wind ons minder gelukkig te zijn geweest; wij zouden dan

ook gaarne, voor het stuk gedrukt wordt, gelegenheid hebben, hem onze bedenkingen daartegen mede te deelen en hem eene omwerking voor te stellen. Tevens zou de schrijver dan eenige toevoegingen kunnen aanbrengen, waartoe, naar hij ons mededeelde, het plan bij hem bestaat.

Onder het genoemde voorbehoud stellen wij gaarne voor, de met nauwgezetheid en ijver bewerkte monographie in de werken der Akademie op te nemen.

H. A. LORENTZ.

J. D. VAN DER WAALS.

De conclusie van het rapport wordt goedgekeurd.

Physiologie. — De Heeren ENGELMANN en PLACE brengen het volgende verslag uit over de verhandeling van den Heer Dr. H. J. HAMBURGER: *„Over den invloed der intra-abdominale drukking op de resorptie in de buikholte"*.

De verhandeling van Dr. H. J. HAMBURGER te Utrecht, waarover aan de ondergeteekenden in de zitting van 28 Dec. j.l. werd opgedragen rapport uit te brengen, draagt den titel: „Over den invloed der intra-abdominale drukking op de resorptie in de buikholte".

In een vroeger opstel (Verhandelingen der K. Akad. Afd. Natuurk. D. IV. N°. 6, 1895) had de heer HAMBURGER aangetoond, dat de resorptie van vocht uit de buikholte voornamelijk plaats heeft door de bloedvaten, en wel — in strijd met de meening van HEIDENHAIN en anderen — niet door een bijzondere vitale actie der cellen van peritoneum en bloedvaten, maar door een zuiver physisch mechanisme: moleculaire en capillaire imbibitie in de haarvaten en aanhoudend wegvoeren van het geïmbibeerde door den bloedstroom. Het verschijnsel had ook plaats na algeheele vernietiging van de levenseigenschappen der cellen en kon buitendien, zooals de heer HAMBURGER in een tweede verhandeling (Verh. d. K. Ak. v. W. D. IV. N°. 7, 1895) door proeven, op een door hem geconstrueerd model genomen, bewees, met kunstmatige voor imbibitie vatbare membranen nagebootst worden.

Bij deze laatste proeven was gebleken, dat de snelheid van resorptie (behalve met de stroomsnelheid binnen het resorbeerende vat) ook met het drukkingsverschil klimt. Dit gaf den heer H. aanleiding na te gaan, of bij het levende individu door verhooging der drukking van het ter resorptie aangeboden vocht, de opneming er van in de bloed-

baan wordt bevorderd, een vraag, uit theoretisch-physiologisch en praktisch-geneeskundig oogpunt belangrijk en tot dusverre nog niet behoorlijk onderzocht.

Langs twee verschillende methoden, op konijnen en honden toegepast, onder aanwending van met bloedserum isotonische NaCl-solutie als te resorbeeren vocht, komt de schrijver tot het resultaat, dat de resorptie gedurende het leven met klimmende intra-abdominale drukking aanvankelijk belangrijk stijgt, maar boven een zekere drukking (meestal ongeveer 20 cM. water), in tegenstelling met hetgeen bij kunstmatige membranen werd gevonden, wederom daalt.

De verklaring van dit verschil ligt in de belemmering van den bloedstroom in de buikvaten bij hooge intra-abdominale drukking, waarvan minder snelle afvoer van het geïmbibeerde vocht het gevolg moet zijn. Het bewijs wordt geleverd door manometrische bepaling der bloedsdrukking in art. carotis of cruralis bij (meestal geeurariseerde en kunstmatig respireerende) konijnen en honden, bij verschillende intra-abdominale drukking. Hierbij bleek, dat de arterieele drukking met stijgende spanning van het vocht in de buikholte aanvankelijk klimt, maar daalt, zoodra die spanning een zekere hoogte overschrijdt. Het keerpunt ligt in 't algemeen op dezelfde hoogte (ongeveer 20 cM. water) als voor de snelheid van resorptie.

De verkregen resultaten leveren tevens de verklaring der klinische observatie, dat verwijdering zelfs van een klein gedeelte eener onder hooge spanning verkeerende pathologische vloeistof gevolgd wordt door versnelde resorptie van het overgeblevene.

De ondergeteekenden beschouwen ook deze nieuwe verhandeling van den heer HAMBURGER als een belangrijke bijdrage tot de leer van de vochtbeweging in het dierlijke lichaam en achten hare opneming in de Verhandelingen der K. Akademie zeer gewenscht.

TH. W. ENGELMANN.

T. PLACE

De conclusie van het rapport wordt goedgekeurd.

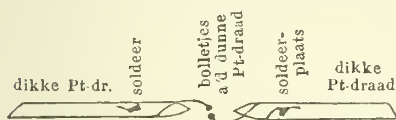
Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES doet, namens den Heer D. VAN GULIK, eene mededeeling over een, onder de leiding van Prof. HAGA te Groningen, verricht onderzoek „*Over de oorzaak van de weerstandsvermindering in microfonische contacten door electrische trillingen teweeggebracht*".

Verscheidene physici hebben in den laatsten tijd proeven gedaan over de weerstandsvermindering in slechte, microfonische contacten

door electrische bestraling, doch van hen spreken slechts twee een vermoeden uit omtrent de oorzaak van dit verschijnsel, namelijk LODGE en BRANLY, en beider verklaringen loopen zeer uiteen.

LODGE ziet de reden der weerstandsverkleining in het doorslaan van een laagje (bijv. oxyde) dat de geleiders gescheiden hield, of wel in een nadering dier geleiders, door aantrekking veroorzaakt; terwijl BRANLY meent dat de middenstof door de bestraling geleidend wordt, en tegen LODGE's bewering aanvoert, dat hij weerstandsvermindering heeft verkregen met buizen waarin het metaalvijlsel in hars of parrafine was ingesloten.

Ik heb me voorgesteld de ware oorzaak experimenteel te zoeken en trachtte daarom aantrekking te constateeren van de geleiders die een slecht contact vormden. De waarschijnlijkheid toch, dat nadering of inniger aanraking de reden zou zijn, won veld, toen ik in een glazen buisje, gedeeltelijk met fijne hageltjes gevuld, vonkjes had zien overspringen als HERTZ'sche golven in het lokaal werden opgewekt, en eveneens tusschen de uiteinden van een verbroken stroomkring, of van twee draden. Deze vonkjes zijn natuurlijk het gevolg van potentiaal-verschillen; dus zullen de uiteinden elkaar aantrekken op het oogenblik dat het overspringen zal plaats hebben. Nu is het mij gelukt deze aantrekking inderdaad te constateeren. Ik had twee platina-draden, van ± één mM. dik, die de uiteinden van een stroomkring vormden en door een micrometerschroef elkander konden naderen. Aan deze dikkere Pt-draden had ik dunnere Pt-draden (van 100 micron dik) gesoldeerd, die nog één à twee mM. buiten de uiteinden der dikkere draden uitstaken, en aan welker uiteinden bolletjes van 100 μ straal waren gesmolten.



vergroot geteekend.

Richtte ik dit toestelletje zoo in, dat de beide bolletjes op een afstand van vier micron *naast* elkaar lagen, wat onder een microscoop bij 420-malige vergrooting bewerkstelligd werd, dan deed de eerste oscilleerende vonk tusschen de vibratorknoppen de Pt-bolletjes tegen elkaar vliegen. Was de afstand bijv. zes μ dan trilden de bolletjes soms heftig en vonkjes sprongen over; dit laatste kon nog worden waargenomen als de afstand 10 μ was. Een op dergelijke wijze ontstaan contact bood den stroom een weerstand van 0.25 Ω.

Om iets te weten te komen omtrent de kracht die bij hagelkorreltjes de werkelijk optredende weerstandsvermindering kan veroorzaken, construeerde ik een toestelletje bestaande in een glazen buisje, waarin van beide zijden door een schroef een koperen zuiger kon worden gedrukt. Tusschen deze beide koperstukken kon ik dus een

zuil zeer fijne hagel van 2.5 cM. lengte samenpersen. Hiermee kreeg ik o. a. het resultaat dat een weerstand in de hagelzuil van 2070 Ω, door electrische trillingen tot 2.3 Ω werd teruggebracht. Dezelfde hagelmassa kon ik echter door persen een weerstand van 0.03^{+} geven, en deze werd door bestraling 0.03^{-}.

Hieruit volgt dat zelfs bij sterk samengeperste hagel de weerstand nog iets wordt verkleind door HERTZ'sche trillingen, maar procentsgewijze *lang* niet zooveel als bij geringe persing. Dit gedrag was uit mijn verklaring te voorspellen geweest omdat de beweeglijkheid der samengedrukte hageltjes uiterst gering is; zij naderen tot één vast lichaam waarop bestraling geen invloed heeft.

Het onderzoek over dit onderwerp, vooral met het oog op BRANLY's proeven met ingesmolten metaalvijlsel, wordt door mij voortgezet.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ brengt ter tafel eene reeks van fotografieën, vervaardigd onder den invloed der X-stralen, en afkomstig van Prof. RÖNTGEN te Würzburg. Alvorens de proeven rond te geven treedt hij in eene uitvoerige beschouwing van de bijzonderheden welke tot de ontdekking geleid hebben, en van datgene wat de studie der nieuw ontdekte stralen bereids aan het licht heeft gebracht.

Pathologie. — De Heer MAC GILLAVRY biedt aan de dissertatie van den Heer D. MAC GILLAVRY: „*de aetiologie en de pathogenese der congenitale hartgebreken*" en licht de door den schrijver gevolgde methode van onderzoek mondeling uitvoerig toe.

Het lid MAC GILLAVRY biedt aan voor de boekerij der Akademie een proefschrift van den Heer D. MAC GILLAVRY over *de aetiologie en de pathogenese der congenitale hartgebreken*, bewerkt in het laboratorium van PROF. SIEGENBEEK VAN HEUKELOM te Leiden. De schrijver van het proefschrift herleidt het ontstaan der congenitale hartgebreken tot twee oorzaken:

1°. de wijze waarop het bloed stroomt in het hart gedurende de verschillende stadiën van ontwikkeling van dit orgaan, en

2°. de wijziging in dien stroom veroorzaakt door uitwendigen druk, die nu eens abnormale vorm- en plaatsveranderingen der deelen van het embryonale hart te voorschijn roept en dan weer normale plaatsverandering belet.

Het tot heden onverklaarde feit dat de voltooide Arteriae Aörta

en Pulmonalis een stuk van een links gewonden spiraalgang vormen, wordt op uiterst eenvoudige wijze afgeleid, niet uit een draaiing dezer vaten, die zooals de schrijver doet opmerken, onmogelijk is, maar uit de bijzondere wijze waarop het bloed bij nog onverdeelden truncus arteriosus in dien truncus stroomt, n.l. als twee links gewonden vloeistof-spiralen, die elkander omstrengelen. De rechter kamer stuwt zijn inhoud in den truncus volgens de as van dit vat, terwijl de linker kamer zich aan de achterzijde van den truncus en loodrecht op de as ontledigt. Het gevolg is het ontstaan der dubbele vloeistof-spiralen, op wier grens het septum trunci als een links gewonden lijst ontstaat.

Abnorme standen van den truncus, ten opzichte van het Ostium interventriculare, door uitwendigen druk te voorschijn geroepen, geven op uiterst eenvoudige wijze de verklaring van alle abnorme standen en vernauwingen der groote slagaderstammen en eveneens die van defecten in de hartsepta en van abnorme septa, terwijl druk *op* den truncus stenose te voorschijn roept, waardoor secundair weer septum-defecten kunnen ontstaan. De abnorme standen en samendrukkingen zullen in verschillende stadiën der hartontwikkeling verschillende gevolgen hebben en de menigvuldigheid van een bepaald congenitaal hartgebrek zal afhangen van den tijdsduur waarin het hart in een bepaald stadium van ontwikkeling verkeert. De ervaring der patholoog-anatomen is in volkomen overeenstemming met deze conclusie van den schrijver.

Wiskunde. — De Heer Jan de Vries biedt voor het zittingsverslag een opstel aan: *„over bipolaire coördinaten”*.

1. Ten opzichte van twee vaste punten P en Q kan een punt S worden aangewezen door de voerstralen $PS = p$ en $QS = q$, of door de hoeken θ en ϑ, die p en q, in denzelfden zin gemeten, met de poolas PQ maken.

Bij de toepassing van deze bipolaire coördinaten is het vaak een voordeel, een derden voerstraal r in te voeren, die S verbindt met eenig punt R van de poolas. Stelt men PQ, PR en QR achtereenvolgens door f, g, h voor, dan zijn, volgens de stelling van Stewart, de drie voerstralen gebonden door de betrekking

$$hp^2 + gq^2 = fr^2 + fgh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Is b.v. gegeven de vergelijking

$$r = kp, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en bepaalt men het punt Q zoo, dat $RQ = k^2 . PQ$, of $h = k^2 f$, dan volgt uit (1)

$$q^2 = fh, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waaruit blijkt, dat de bipolaire vergelijking (2) een cirkel voorstelt, t. o. waarvan de polen P en R inverse punten zijn.

2. Op soortgelijke wijs kan aangetoond worden, dat de vergelijking

$$\alpha p + \beta q = \gamma f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

die een ovaal van DESCARTES, met „brandpunten" P en Q, voorstelt, kan vervangen worden door een der volgende twee vergelijkingen

$$\gamma p - \beta r = \alpha g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\gamma q + \alpha r = \beta h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wanneer het punt R bepaald wordt uit

$$\alpha^2 g + \beta^2 h = \gamma^2 f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Zoo blijkt dus, dat op PQ een derde „brandpunt" ligt, dat voor de kromme dezelfde beteekenis heeft als P en Q. (Theorema van CHASLES).

Bovendien volgt uit (4), (5), (6) nog de tripolaire vergelijking

$$\alpha g q - \beta h p + \gamma f r = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

In het voorafgaande is ondersteld, dat P het brandpunt is, dat buiten de kromme ligt. Zet men haar om door eene inversie met centrum P en macht fg, zoodat de nieuwe voerstraal p' door $pp' = fg$ wordt bepaald, dan voldoen de nieuwe voerstralen q' en r' aan

$$r : q' = g : p'$$

$$q : r' = f : p'.$$

Vergelijking (6) gaat dan over in

$$\alpha g q' - \beta h p' + \gamma f r' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

waaruit, met het oog op (8), blijkt, dat de kromme voor de bedoelde inversie anallagmatisch is.

Door inversies met centra Q en R verandert zij in eene kromme van dezelfde soort, en met dezelfde brandpunten.

3. Is τ de hoek, dien de raaklijn eener kromme met de poolas maakt, en stelt men $\tau = \Theta + \varphi = \vartheta + \Phi$, dan kan de stand der raaklijn worden aangegeven door eene betrekking tusschen de hoeken φ en Φ, welke zij maakt met de voerstralen p en q.

Nu is

$$\cos\varphi = \cos\tau\cos\Theta + \sin\tau\sin\Theta = \frac{x\,dx + y\,dy}{p\,ds} = \frac{dp}{ds}$$

$$\sin\varphi = \sin\tau\cos\Theta - \cos\tau\sin\Theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{p\,ds} = p\,\frac{d\Theta}{ds},$$

waar de coördinaten x en y genomen zijn t. o. v. het punt P als oorsprong.

Hieruit volgen de formules

$$\cos\varphi : \cos\Phi = dp : dq \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\sin\varphi : \sin\Phi = p\,d\Theta : q\,d\vartheta = \sin\vartheta\,d\Theta : \sin\Theta\,d\vartheta \quad \ldots \quad (11)$$

Differentieert men de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}\cos\vartheta &= (p^2 - q^2 - f^2) : 2fq \\ \cos\Theta &= (p^2 - q^2 + f^2) : 2fp\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

en substitueert de voor $d(\cos\vartheta)$ en $d(\cos\Theta)$ verkregen vormen in

$$\sin\varphi : \sin\Phi = p^2 d(\cos\Theta) : q^2 d(\cos\vartheta)$$

(zie (11)), dan komt de formule

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\Phi} = \frac{(p^2 + q^2 - f^2)\,dp - 2\,pq\,dq}{2\,pq\,dp - (p^2 + q^2 - f^2)\,dq} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

te voorschijn.

4. Wordt de kromme $F_1(p, q) = 0$ loodrecht gesneden door de kromme $F_2(p, q) = 0$, dan heeft men

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad \Phi_2 = \Phi_1 + \frac{\pi}{2},$$

zoodat

$$\cos \varphi_2 : \cos \Phi_2 = \sin \varphi_1 : \sin \Phi_1.$$

Met behulp van de formules (10) en (13) vindt men hieruit

$$\frac{dp_2}{dq_2} = \frac{(p^2 + q^2 - f^2)\, dp_1 - 2\, pq\, dq_1}{2\, pq\, dp_1 - (p^2 + q^2 - f^2)\, dq_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

of in meer symmetrischen vorm

$$2\, pq\, (dp_1\, dp_2 + dq_1\, dq_2) = (p^2 + q^2 - f^2)\, (dp_1\, dq_2 + dp_2\, dq_1). \quad (15)$$

Als toepassing van deze voorwaarde zal aangetoond worden, dat van het stelsel confocale Cartesiaansche ovalen

$$\alpha p + \beta q = \gamma f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wanneer de drie brandpunten gebonden zijn door

$$\alpha^2 g + \beta^2 h = \gamma^2 f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

door elk punt twee krommen gaan, die elkaar loodrecht snijden.

Uit (4) en (7) volgt, door eliminatie van γ,

$$(p^2 - fg)\, \alpha^2 + 2\, pq\, \alpha\beta + (q^2 - fh)\, \beta^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Voor de beide door het punt (p, q) aangewezen ovalen heeft men nu

$$dp_1 : dq_1 = -\beta_1 : \alpha_1$$

$$dp_2 : dq_2 = -\beta_2 : \alpha_2$$

Derhalve wordt

$$\frac{dp_1\, dp_2 + dq_1\, dq_2}{dp_1\, dq_2 + dp_2\, dq_1} = -\frac{\alpha_1\, \alpha_2 + \beta_1\, \beta_2}{\alpha_2\, \beta_1 + \alpha_1\, \beta_2} = -\frac{1 + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}}{\dfrac{\beta_1}{\alpha_1} + \dfrac{\beta_2}{\alpha_2}} =$$

$$= \frac{1 + \dfrac{p^2 - fg}{q^2 - fh}}{\dfrac{2\, pq}{q^2 - fh}} = \frac{p^2 + q^2 - f^2}{2\, pq};$$

aan de voorwaarde (15) is derhalve voldaan.

6. De orthogonale trajectoren van het stelsel

$$\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}=\frac{\gamma}{f} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \; . \; . \quad (17)$$

(meridiaankrommen der potentiaalniveaux voor twee hoeveelheden agens α, β in de polen P, Q geplaatst), vindt men gemakkelijk met behulp van (10) en (11).

Men heeft n.l.

$$\cos \varphi_1 : \cos \Phi_1 = dp_1 : dq_1 = -\beta\, p^2 : \alpha\, q^2 = -\beta \sin^2 \vartheta : \alpha \sin^2 \theta,$$

en voor de orthogonale kromme

$$\sin \vartheta\; d\theta_2 : \sin \theta\; d\vartheta_2 = \sin \varphi_2 : \sin \Phi_2 = \cos \varphi_1 : \cos \Phi_1,$$

derhalve

$$\sin \vartheta\; d\theta_2 : \sin \theta\; d\vartheta_2 = -\beta \sin^2 \vartheta : \alpha \sin^2 \theta$$

of

$$\alpha \sin \theta\; d\theta + \beta \sin \vartheta\; d\vartheta = 0.$$

Het gevraagde stelsel wordt dus voorgesteld door de vergelijking

$$\alpha \cos \theta + \beta \cos \vartheta = \text{const.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

(krachtlijnen).

Bij toepassing van de voorwaarde (15) komt men tot de differentiaalvergelijking

$$\frac{dp}{dq}=\frac{\beta p^2\,(p^2+q^2-f^2)+2\,\alpha\, pq^3}{\alpha q^2\,(p^2+q^2-f^2)+2\,\beta\, p^3 q}, \quad . \; . \; . \; . \quad (19)$$

waarvan de integraal uit (18) kan worden afgeleid met behulp van (12). Men vindt dan

$$\alpha q\,(p^2-q^2+f^2)+\beta p\,(p^2-q^2-f^2)=2\,\mu\, fpq \quad . \; . \quad (20)$$

7. De voorwaarde (15) kan door de notatie $p+q=u$, $p-q=v$ nog in den eenvoudigen vorm

$$\frac{du_1\; du_2}{u^2-f^2}=\frac{dv_1\; dv_2}{v^2-f^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

geschreven worden.

Om b.v. de orthogonale trajectoren te vinden van het stelsel ovalen

$$\alpha p + \beta q = \gamma f,$$

dat ontstaat, als alleen γ verandert, vervangt men deze vergelijking door

$$(\alpha + \beta) u + (\alpha - \beta) V = 2 \gamma f.$$

Dan levert (21) terstond

$$\left(\frac{u - f}{u + f}\right)^{\alpha - \beta} \left(\frac{v - f}{v + f}\right)^{\alpha - \beta} = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt een opstel aan getiteld: *„Over het oppervlak van* STEINER [1])".

1. Het oppervlak van STEINER is van den vierden graad en heeft drie door een punt gaande, niet in een zelfde vlak gelegene dubbellijnen. Met betrekking tot deze lijnen als coördinaatassen wordt het dus door de vergelijking $a y^2 z^2 + b z^2 x^2 + c x^2 y^2 + 2 d x y z t = 0$ voorgesteld, als $t = 0$ een niet door den oorsprong gaand vlak aanduidt; hieruit volgt, dat de oorsprong, het snijpunt der dubbellijnen, een triplanair drievoudig punt is. Zoo als KUMMER opmerkt, kan het overgaan in $y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 = 2 k x y z$ door projectieve transformatie. Daarom zal in het volgende alleen sprake zijn van dit meer regelmatige oppervlak, dat we S^4 noemen en waarvan een gipsmodel voorkomt in de verzameling, uitgegeven door de firma BRILL te Darmstadt [2]).

2. Iedere kegel K^2 van den tweeden graad door de drie dubbellijnen van S^4 gebracht snijdt S^4 volgens een ruimtekromme van den achtsten graad, waarvan O een zesvoudig punt is. Van deze doorsnee maken de drie dubbellijnen tweemaal deel uit. Dus moet de rest bestaan uit een niet door O gaande, niet ontaardende kegelsnee. Wijl het aantal kegels K^2 met drie gegeven ribben tweevoudig

---

[1]) Dit oppervlak, dat door STEINER tijdens een verblijf te Rome ontdekt is, draagt in Duitschland den naam *„die Römische Fläche* von STEINER."

[2]) Zie *Catalog mathematischer Modelle*, neunte Serie, N°. 3, blz. 19 en blz. 36. Aan dit model is een afdruk van KUMMER's mededeelingen aan de Akademie van Berlijn (*Monatsberichte* 1863, blz. 539, 1866 blz. 216, 1872 blz. 474) toegevoegd. In de tweede en derde komt dit oppervlak onder meer algemeene groepen voor. De tweede bevat ook de vergelijking $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t} = 0$.

oneindig is, moet S^4 een tweevoudig oneindig aantal kegelsneden bevatten. Deze eigenschap is bekend. Zoo als men weet, heeft KUMMER [1]) reeds in 1863 opgemerkt, dat elk raakvlak van S^4 dit oppervlak snijden moet volgens een kromme van den vierden graad met vier dubbelpunten, nl. het raakpunt en de snijpunten met de drie dubbellijnen. En zulk een kromme is de vereeniging van twee kegelsneden, als niet drie der vier dubbelpunten op een rechte lijn liggen.

3. In het vlak, dat de kegelsnee van doorsnee van S^4 met den kegel $a\,y\,z + b\,z\,x + c\,x\,y = 0$ bevat, ligt nog een tweede kegelsnee van S^4, waarbij een nieuwe kegel $a'\,y\,z + b'\,z\,x + c'\,x\,y = 0$ behoort. Anders gezegd, de raakvlakken van S^4 doen tusschen de kegels $a\,y\,z + b\,z\,x + c\,x\,y = 0$ een kwadratische verwantschap ontstaan. We bewijzen met behulp van de vergelijking van het raakvlak, dat de kegels $a\,y\,z + b\,z\,x + c\,x\,y = 0$ en $a'\,y\,z + b'\,z\,x + c'\,x\,y = 0$ onder de voorwaarden $a\,a' = b\,b' = c\,c'$ bij elkaar behooren.

4. Een willekeurige lijn door O snijdt S^4 in een *enkel* van O verschillend punt, dat altijd bestaanbaar is; dus kunnen de coördinaten van dit punt *ondubbelzinnig* worden uitgedrukt in de richtingscoëfficiënten der lijn. Stellen wij $x = p\,t$, $y = q\,t$, $z = r\,t$, dan volgt uit invoering dezer waarden in de vergelijking van het oppervlak onmiddellijk $t = \dfrac{2\,k\,p\,q\,r}{q^2 r^2 + r^2 p^2 + p^2 q^2}$, waarmee dus de waarden van x, y, z gevonden zijn. Derhalve wordt de vergelijking van het raakvlak

$$q\,r\,(-q^2 r^2 + r^2 p^2 + p^2 q^2)\,x + r\,p\,(q^2 r^2 - r^2 p^2 + p^2 q^2)\,y + \\ -\,p\,q\,(q^2 r^2 + r^2 p^2 - p^2 q^2)\,z = 2\,k\,p^2 q^2 r^2.$$

Vereenigen we deze vergelijking met die van S^4 en wel door het eerste lid met $2\,k\,x\,y\,z$, het tweede met de volgens de vergelijking van S^4 daaraan gelijke waarde $y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2$ te vermenigvuldigen, dan vinden we de homogene vergelijking

---

[1]) *Journal f. d. reine und angewandte Math.*, deel 64, blz 73. Vergelijk hierbij ook de aanmerking van WEIERSTRASS blz. 77 bevattende de oorspronkelijke constructie van het oppervlak punt voor punt hem door STEINER zonder bewijs meegedeeld, verder omtrent dit bewijs de verhandeling van SCHRÖTER, blz. 79, die van CAYLEY, blz. 172 en eindelijk vooral die van CREMONA, deel 63, blz. 315.

Een verhandeling, die F. GERBALDI in 1881 te Turijn gepubliceerd moet hebben, doch die ik alleen bij SALMON (*Geometry of three dimensions*, blz. 491) vermeld vond en o.a. niet in de *Fortschritte der Mathematik* is gerefereerd, heb ik niet kunnen raadplegen. Overigens is de litteratuur, naar ik meen, volledig aangegeven.

$$x y z \Sigma \{ q r (- q^2 r^2 + r^2 p^2 + p^2 q^2) x \} = p^2 q^2 r^2 \Sigma (y^2 z^2)$$

van den kegel K^4, die O tot top en de doorsnee van S^4 met het raakvlak tot richtkromme heeft. Deze kegel nu moet ontaarden in twee kegels K^2. Werkelijk doen de substituties

$$q r = l,\ r p = m,\ p q = n \text{ en } x = \frac{1}{\xi},\ y = \frac{1}{\eta},\ z = \frac{1}{\zeta}$$

de vergelijking in $l m n \Sigma \xi^2 - \Sigma \{ l (- l^2 + m^2 + n^2) \eta \zeta \} = 0$ overgaan, waarvan het eerste lid het product is van twee eerstemachtsfactoren. Want de determinant

$$\begin{vmatrix} 2 l m n\ , & - n (l^2 + m^2 - n^2), & - m (l^2 - m^2 + n^2) \\ - n (l^2 + m^2 - n^2), & 2 l m n\ , & - l (- l^2 + m^2 + n^2) \\ - m (l^2 - m^2 + n^2), & - l (- l^2 + m^2 + n^2), & 2 l m n \end{vmatrix}$$

van HESSE herleidt zich tot

$$l m n \begin{vmatrix} 2 l^2\ , & - (l^2 + m^2 - n^2), & - (l^2 - m^2 + n^2) \\ - (l^2 + m^2 - n^2), & 2 m^2\ , & -(- l^2 + m^2 + n^2) \\ - (l^2 - m^2 + n^2), & -(- l^2 + m^2 + n^2), & 2 n^2 \end{vmatrix}$$

en deze laatste is identisch nul, wijl de som der elementen in iedere rij (en in iedere kolom) nul is [1]).

5. In de verkregen vergelijking $l m n \Sigma \xi^2$ — enz. $= 0$ hebben de termen ξ^2, η^2, ζ^2 denzelfden coëfficiënt. Dus moet het eerste lid het product zijn van twee eerstemachtsfactoren $a \xi + b \eta + c \zeta$ en $\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + \frac{\zeta}{c}$, die bij teruggang tot x, y, z de bij elkaar behoorende kegels $a y z + b z x + c x y = 0$ en $\frac{y z}{a} + \frac{z x}{b} + \frac{x y}{c} = 0$ opleveren. Hiermee is de in minder overzichtelijken vorm door CREMONA gegevene involutorische verwantschap tusschen de kegels K^2 bewezen.

---

[1]) Een overeenkomstig bewijs van deze ontbindbaarheid gaf K. TH. VAHLEN in de *Acta Mathematica*, deel 19, blz. 199. Verder bewees G. CASTELNUOVO, in de *Rendiconti* van de Accad. Reale dei Lincei, reeks 5, deel 3, blz. 22, de stelling van KRONECKER, volgens welke een enkelvoudig stelkundig oppervlak, dat door een tweevoudig oneindig aantal vlakken volgens ontaardende krommen gesneden wordt, òf een regelvlak òf een oppervlak van STEINER zijn moet (vergelijk o.a. *Revue semestrielle*, II 2, blz. 98).

Gemakkelijk vindt men de bij de twee kegels behoorende snijlijn

$$\frac{x}{a(b^2-c^2)}=\frac{y}{b(c^2-a^2)}=\frac{z}{c(a^2-b^2)},$$

die dan op haar beurt onmiddellijk het overeenkomstige raakpunt doet kennen.

6. Twee willekeurig gekozene en dus in het algemeen niet bij elkaar behoorende kegels K^2 door de dubbellijnen hebben behalve deze drie lijnen nog een vierde ribbe gemeen, die altijd bestaanbaar is. Het punt, waarin S^4 door deze ribbe gesneden wordt, ligt op de beide kegelsneden, die bij de aangenomen kegels behooren. Anders gezegd, twee willekeurig op S^4 aangenomen kegelsneden hebben steeds een punt gemeen. Ze hebben dan alleen twee punten gemeen, als hun vlakken een der dubbellijnen in een zelfde punt snijden, en natuurlijk vier punten, als ze in een zelfde raakvlak liggen.

Hieruit volgt, dat er door een willekeurige lijn drie raakvlakken aan S^4 te brengen zijn en dit oppervlak dus van de derde klasse is [1]). Zijn nl. A, B, C, D de snijpunten van S^4 met deze lijn, dan is er een enkel raakvlak door de lijn te brengen, waarvoor een der beide kegelsneden door (A, B), de andere door (C, D) gaat. En evenzoo is dit voor de combinaties (A, C) en (B, D), (A, D) en (B, C) het geval.

7. We bevestigen de laatste uitkomst rechtstreeks door de tangentieele vergelijking van S^4 te zoeken. Zijn u, v, w de tangentieele coördinaten van het raakvlak $xu+yv+zw+1=0$, dan vinden we uit de vergelijking van het raakvlak

$$u=\frac{qr(q^2r^2-r^2p^2-p^2q^2)}{2kp^2q^2r^2}, \quad v=\text{enz.}, \quad w=\text{enz.}$$

of

$$u=\frac{l^2-m^2-n^2}{2kmn}, \qquad v=\frac{-l^2+m^2-n^2}{2knl}, \qquad w=\frac{-l^2-m^2+n^2}{2klm}.$$

Dus kunnen $-ku$, $-kv$, $-kw$ de cosinussen zijn van de drie hoeken A, B, C eens driehoeks (met de zijden l, m, n). Hieruit volgt in verband met de betrekking Sin. $(A+B+C)=0$ na uitwerking en verdrijving der wortels

---

[1]) Dit bekende resultaat wordt bij Cremona (t. a. p.) aangetroffen; door Th. Reye wordt het langs geheel anderen weg afgeleid (vergelijk daaromtrent zijn *Geometrie der Lage*, deel 2, les 28).

$$\{ k^2 (u^2 + v^2 + w^2) - 1 \}^2 = 4 k^6 u^2 v^2 w^2$$

of

$$2 k^3 u v w \pm \{ k^2 (u^2 + v^2 + w^2) - 1 \} = 0,$$

waarbij het bovenste teeken aan het gegeven oppervlak S^4, het onderste teeken aan het oppervlak $y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 + 2 k x y z = 0$ met van teeken omgekeerde k beantwoordt.

8. De vergelijking $y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 = 2 k x y z$ kan in elk der vier vormen

$$(y z + z x + x y)^2 = 2 x y z (x + y + z + k),$$

$$(- y z + z x + x y)^2 = 2 x y z (x - y - z + k),$$

$$(y z - z x + x y)^2 = 2 x y z (- x + y - z + k),$$

$$(y z + z x - x y)^2 = 2 x y z (- x - y + z + k)$$

geschreven worden. Hieruit volgt, dat de vier vlakken

$$x + y + z + k = 0, \quad x - y - z + k = 0,$$

$$- x + y - z + k = 0, \quad - x - y + z + k = 0$$

het oppervlak aanraken volgens de kegelsneden, die behooren bij de kegels

$$y z + z x + x y = 0, \quad - y z + z x + x y = 0,$$

$$y z - z x + x y = 0, \qquad y z + z x - x y = 0.$$

Uit de vier identiteiten

$$(x + y + z)^2 - 2 (y z + z x + x y) - k^2 = x^2 + y^2 + z^2 - k^2,$$

$$(x - y - z)^2 - 2 (- y z + z x + x y) - k^2 = x^2 + y^2 + z^2 - k^2,$$

$$(- x + y - z)^2 - 2 (xz - z x + x y) - k^2 = x^2 + y^2 + z^2 - k^2,$$

$$(- x - y + z)^2 - 2 (y z + z x - x y) - k^2 = x^2 + y^2 + z^2 - k^2$$

blijkt dan verder, dat deze kegelsneden alle vier cirkels zijn gelegen op den bol $x^2 + y^2 + z^2 - k^2 = 0$. De straal dezer cirkels is $\frac{1}{3} k \sqrt{6}$.

Uit de vergelijkingen der vier bijzondere raakvlakken kan o.a. blijken, dat de tangentieele vergelijking van S^4 in de boven gegeven notatie het plusteeken heeft.

9. De cirkels van aanraking der bijzondere raakvlakken maken deel uit van de parabolische kromme van S^4; wat meer zegt, zij vormen gezamenlijk de parabolische kromme [1]). We bewijzen dit rechtstreeks door den determinant van Hesse

$$\begin{vmatrix} y + z^2 \;, & 2\,x\,y - k\,z, & 2\,x\,z - k\,y, & y\,z \\ 2\,x\,y - k\,z, & z^2 + x^2 \;, & 2\,y\,z - k\,x, & z\,x \\ 2\,x\,z - k\,y, & 2\,y\,z - k\,x, & x^2 + y^2 \;, & x\,y \\ yz \;, & z\,x \;, & x\,y \;, & 0 \end{vmatrix}$$

naar de randen der eentermige elementen te ontwikkelen en deze uitkomst nul te stellen. Dit geeft

$$-\Sigma \left\{ y^2\,z^2 \begin{vmatrix} z^2 + x^2 \;, & 2\,y\,z - k\,x \\ 2\,y\,z - k\,x, & x^2 + y^2 \end{vmatrix} \right\} +$$

$$+ 2\,x\,y\,z\,\Sigma \left\{ x \begin{vmatrix} y^2 + z^2 \;, & 2\,x\,y - k\,z \\ 2\,x\,z - k\,y, & 2\,y\,z - k\,x \end{vmatrix} \right\} = 0$$

of $\Sigma\,(y^4\,z^4) - x^2\,y^2\,z^2\,\{\,k^2 + \Sigma\,(x^2)\,\} = 0$. In verband met de herleiding $\Sigma\,(y^4\,z^4) = \{\,\Sigma\,(y^2\,z^2)\,\}^2 - 2\,x^2\,y^2\,z^2\,\Sigma\,(x^2) = 4\,k^2\,x^2\,y^2\,z^2 - 2\,x^2\,y^2\,z^2\,\Sigma\,(x^2)$ gaat dit in $x^2\,y^2\,z^2\,\{\,k^2 - \Sigma\,(x^2)\,\} = 0$ over. Dus bestaat de parabolische kromme buiten de dubbellijnen om uit de doorsnee van $S^4 = 0$ met den bol $\Sigma\,(x^2) = k^2$.

10. We zoeken de vergelijking van S^4 in homogene afstandscoördinaten met betrekking tot het regelmatig viervlak der bijzondere raakvlakken. De bij deze transformatie behoorende vergelijkingen zijn

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + k &= x_1 \sqrt{3} \\ x - y - z + k &= x_2 \sqrt{3} \\ -x + y - z + k &= x_3 \sqrt{3} \\ -x - y + z + k &= x_4 \sqrt{3} \end{aligned}\right\} \quad \text{of} \quad \left\{\begin{aligned} 4\,x &= (x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \sqrt{3} \\ 4\,y &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \sqrt{3} \\ 4\,z &= (x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \sqrt{3} \\ 4\,k &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \sqrt{3} \end{aligned}\right\}.$$

---

[1]) Eigenlijk bestaat de parabolische kromme uit de vier cirkels en de achtmaal getelde dubbellijnen. Want deze lijnen zijn viervoudige lijnen op het oppervlak van Hesse (vergelijk Cremona, t. a. p. en de uitgewerkte vergelijking van het oppervlak).

Met behulp hiervan vindt men in verkorte notatie

$$\Sigma (x_1^4) - 4 \Sigma (x_1^3 x_2) + 6 \Sigma (x_1^2 x_2^2) + 4 \Sigma x_1^2 x_2 x_3 - 40 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

Tot dit resultaat geraakt men ook aldus. Wegens de symmetrische ligging van het oppervlak met betrekking tot de zijvlakken van het coördinatenviervlak moet de vergelijking den vorm

$$\Sigma (x_1^4) + a \Sigma (x_1^3 x_2) + b \Sigma (x_1^2 x_2^2) + c \Sigma (x_1^2 x_2 x_3) + d x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

aannemen. Voor $x_1 = 0$ moet dit in $\{ \Sigma (x_2^2) - 2 \Sigma (x_2 x_3) \}^2 = 0$, d. i. in den tweemaal getelden in $x_1 = 0$ gelegen cirkel, overgaan. Hieruit volgt $a = -4$, $b = 6$, $c = 4$. Bovendien eischt het nul worden voor $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ (de oude oorsprong) de betrekking $4 + 12 a + 6 b + 12 c + d = 0$; in verband met de voor a, b, c gevonden waarden geeft dit $d = -40$.

11. Elimineeren we z tusschen de vergelijking van S^4 en $a y z + b z x + c x y = 0$, dan vinden we

$$c^2 (x^2 + y^2) + (b x + a y)^2 + 2 k c (b x + a y) = 0$$

als de vergelijking der projectie van de overeenkomstige kegelsnee op het vlak XY. Het middelpunt dezer projectie doet ons voor het middelpunt der kegelsnee zelve de betrekkingen

$$a x = b y = c z = - \frac{k a b c}{a^2 + b^2 + c^2}$$

vinden. Dus is de meetkundige plaats van dit middelpunt het nieuwe oppervlak van Steiner door $y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 + k x y z = 0$ voorgesteld, dat op een zeer eenvoudige wijs met het oorspronkelijke samenhangt. Het wordt nl. uit S^4 afgeleid door de voerstralen van het drievoudige punt te halveeren en van teeken om te keeren.

12. Natuurlijk geeft het oppervlak van Steiner aanleiding tot het ontstaan van verschillende andere meetkundige plaatsen, zooals die van de brandpunten, de toppen, de richtlijnen en de assen der kegelsneden; verder die van de verschillende merkwaardige punten van den driehoek PQR, waarbij P, Q, R de snijpunten van OX, OY, OZ met de raakvlakken voorstellen; eindelijk die van de verschillende merkwaardige punten van de viervlakken $OPQR$ door de raakvlakken en de coördinaatvlakken begrensd. Het bestek van dit opstel gedoogt echter niet op deze punten thans verder in te gaan.

Physiologie. — De Heer ENGELMANN deelt de uitkomsten mede van een door Dr. H. J. HAMBURGER in het werk gesteld onderzoek naar *„de beteekenis van ademhaling en peristaltiek voor de resorptie in den darm"*.

De resultaten verkregen met mijn toestel tot nabootsing der resorptie aan kunstmatige homogene membranen [1]) maakten het wenschelijk, den invloed der drukking op genoemd proces ook bij het levende individu te onderzoeken.

Ik deed dit reeds ten aanzien van de resorptie in de buikholte, de volgende bladzijden bevatten in het kort de resultaten van een soortgelijk onderzoek met betrekking tot den dunnen darm.

Om den invloed der intraintestinale drukking op de resorptie in den darm te onderzoeken, was het noodig een middel te bezitten, die drukking naar willekeur te kunnen regelen. Dit middel kon gevonden worden door een darmlis aan eene zijde af te sluiten en aan de andere zijde in verbinding te brengen met een vloeistofreservoir, dat op verschillende hoogten kon gesteld worden. Bij deze wijze van handelen doet zich echter het bezwaar voor, dat bij stijging der intraintestinale drukking de darm zich uitzet; het gevolg hiervan is dat de resorbeerende oppervlakte zich vergroot en men dus, waar werkelijk de resorptie blijkt toe te nemen, in het onzekere verkeert of deze toeneming te danken is aan de vergrooting van oppervlakte dan wel aan de vermeerdering der intraintestinale drukking als zoodanig.

Aan dit bezwaar ben ik te gemoet gekomen door den darm te leggen in een vaste buis, die de kromming had van de darmlis.

Behalve met de genoemde, werd nog volgens een tweede methode geëxperimenteerd. Een aan beide zijden afgebonden darmlis werd, na bedeeld te zijn met een bekende hoeveelheid eener isotonische keukenzoutoplossing in de buikholte teruggebracht. Nadat deze weer hermetisch gesloten was, werd, door in de buikholte lucht te blazen, de intraintestinale drukking verhoogd. De luchtdrukking kon nauwkeurig geregeld en gemeten worden.

Beide methoden nu gaven een gelijkluidend resultaat:

Verhooging der intraintestinale drukking bevordert de resorptie in aanzienlijke mate.

---

[1]) Ein Apparat, welcher gestattet, die Gesetze von Filtration und Osmose strömender Flüssigkeiten bei künstlichen homogenen Membranen zu studiren. Verhandelingen Koninkl. Akad. v. Wetensch. Dl. IV, N°. 7. 1895.

Dit resultaat stemt volkomen overeen met hetgeen ik vond bij mijn studie over den invloed der intraabdominale drukking op de resorptie in de buikholte. Ook daar bleek bij verhooging van drukking de resorptie toe te nemen.

Ik ben hier echter nog een stap verder gegaan dan bij het laatstbedoelde onderzoek en heb mij afgevraagd of er nog resorptie in den darm mogelijk is, wanneer de intraintestinale drukking 0 of negatief wordt. Het spreekt van zelf dat voor deze proeven een inrichting moest getroffen worden, waardoor de darm belet werd saam te vallen.

Het resultaat der experimenten was niet twijfelachtig:

Wanneer de drukking ½ cM. bedraagt, wordt, hoewel langzaam toch nog geresorbeerd. *Is de drukking daarentegen* 0 *of negatief dan is de resorptie* 0.

Ziehier de resultaten van een proevenreeks. Het proefdier is een hond; de vloeistof is, zooals bij alle proeven die ik tot dusverre over dit onderwerp verrichte, een isotonische Na Cl-solutie; de lengte der darmlis bedraagt 13 cM.

Intraintestinale drukking, gemeten in cM. Na Cl-oplossing van 0.9 pCt.	cc. Na Cl-oplossing van 0.9 pCt. *geresorbeerd in 4 minuten.*
0 cM.	0 cc.
+ ½ cM.	0.3 „
+ 2½ „	0.7 „
+ 6½ „	1.1 „
+ 10½ „	1.8 „
— 1 „	0 „
— 1 „	0 „
— 1 „	0 „
+ ½ „	0.3 „
+ 2½ „	0.6 „
+ 6 „	1.1 „
+ 10½ „	1.9 „
+ 14 „	2.1 „
+ 23 „	2.9 „
+ 14 „	2 „
+ 5 „	0.9 „
0 „	0 „
0 „	0 „
0 „	0 „
+ ½ „	0.4 „

Dit resultaat schijnt mij belangrijk, vooreerst voor de opvatting van het resorptie proces in het algemeen.

Mag toch reeds het feit, dat zoowel in de buikholte als in het darmkanaal de resorptie stijgt met de hydrostatische drukking als een waarschijnlijkheids-argument gelden tegen de voorstelling van HOPPE-SEYLER en HEIDENHAIN dat de resorptie als een levensproces moet opgevat worden, het feit dat in het geheel geen resorptie plaats heeft, wanneer de vloeistof-drukking 0 of negatief wordt, verhoogt de waarde van het argument in niet geringe mate. Voegt men daarbij nog mijn talrijke proeven die aantoonden dat de resorptie-verschijnselen, tot dusverre bij het levende dier waargenomen, bij doode dieren [1]), ja zelf bij kunstmatige homogene membranen kunnen nagebootst worden, dan bestaat er, zoolang geen nieuwe feiten zijn gevonden, welke met mijne zuiver physische verklaring in strijd zijn, volgens mijne meening geen grond, het resorptie-proces als een levensverschijnsel te beschouwen [2]).

Maar de genoemde resultaten over den invloed der intraintestinale drukking schijnen mij niet alleen belangrijk voor de resorptie in het

---

[1]) In een dezer dagen verschenen opstel: „Bemerkungen und Versuche betreffs der Resorption in der Bauchhöhle". (PFLÜGER's Archiv B. 62 S. 331), schrijft HEIDENHAIN o. a. „HAMBURGER fand die verblüffende Thatsache, dass isotonische, selbst hyperisotonische Flüssigkeiten auch beim todten Thiere, selbst nog 24 Stunden nach dem Tode aus der Bauchhöhle verschwinden. Die Thatsache habe ich zu meinem nicht geringen Erstaunen bestätigt gefunden." . . . . . .

[2]) Ik denk er niet aan te willen beweren, dat het leven op het resorptie-proces geen invloed kan en zal uitoefenen. Onder physiologische en pathologische voorwaarden kunnen ongetwijfeld in *levende* membranen fijn genuanceerde veranderingen optreden, die op de daarin plaats hebbende physische processen een niet geringen invloed uitoefenen, maar waardoor die processen zelve toch niet ophouden, zuiver physische processen te zijn.

De arterieele bloedsdrukking wordt teweeggebracht door contractie van de linker kamer, dit is uit een zuiver physisch oogpunt voor ieder begrijpelijk; maar wanneer een of andere oorzaak zoodanig inwerkt op het leven der hartspier, dat deze vettig degenereert, dan wijzigt zich de bloedsdrukking. Doch in dit feit kan geen reden liggen om het verband tusschen hartscontractie en bloedsdrukking nu niet meer als van zuiver physischen aard te beschouwen.

Deze opmerkingen gelden zoowel voor de resorptie in de buikholte als voor die in den darm.

Ten slotte wil ik nog aanstippen, dat ik ten aanzien van de lymphvorming, het capillairvat nog altijd als actief, secerneerend orgaan blijf beschouwen; en dat is naar mijne meening, zeer goed vereenigbaar met de voorstelling, dat hetzelfde capillairvat zich ten opzichte van het resorptie-proces als een geheel passieve membraan gedraagt. Men zou zich bijv. kunnen voorstellen, dat alleen bepaalde gedeelten van de endotheliumcel secerneeren, terwijl de daartusschen gelegen deelen dit niet doen.

algemeen, zij openen ook een nieuw gezichtspunt voor de resorptie in het darmkanaal in het bijzonder.

Al spoedig toch dringt zich de vraag op, op welke wijze dan in het normale leven de voor de resorptie noodzakelijke intraintestinale drukking tot stand komt. En dan zijn het drie factoren welke ongetwijfeld daarbij een rol spelen. 1°. de ademhaling, 2°. de peristaltische beweging, 3°. het gewicht van het darmkanaal.

Bij iedere inademing toch zal het diaphragma, bij iedere uitademing zullen de buikspieren op de ingewanden drukken. Deze drukking zal zich aan alle ingewanden mededeelen, hoewel niet in alle richtingen in even sterke mate. Intusschen behoeft zij niet groot te zijn; een drukking van ½ cM. reeds kan, gelijk boven bleek, bij honden nog resorptie te voorschijn roepen.

Proeven, opzettelijk in het werk gesteld om na te gaan, met welke kracht de darmen tengevolge van de ademhaling tegen elkander gedrukt worden, leerden dat deze bij kleine honden, die 24 uren gevast hadden, ongeveer 5 cM. water bedroeg, een drukking, welke blijkens mijn experimenten alleen reeds voldoende is, om een aanzienlijken resorptiestroom in het leven te roepen. Met de vulling van het darmkanaal en bij het dieper worden van de ademhaling zal die drukking natuurlijk stijgen.

Maar niet alleen de ademhaling, ook de peristaltische beweging treedt hier als een nieuwe factor bij het resorptie-proces te voorschijn. Ieder vloeistofgolfje toch doet den darmwand daar ter plaatse uitwijken, maar aangezien de darmen overal tegen elkander aanliggen, zal de aangrenzende darm weggedrukt moeten worden. Het ligt voor de hand, dat hierdoor de intraintestinale drukking op die plaats een oogenblik verhoogd wordt, terwijl bij voortgang van de peristaltiek hetzelfde verschijnsel zich een weinig verder herhaalt.

Dat ook het gewicht der darmen tot de intraintestinale drukking bijdraagt, behoeft niet uiteengezet te worden.

Vatten wij ten slotte met een enkel woord samen, hoe wij ons de resorptie van vloestoffen in het darmkanaal voorstellen.

Al spoedig wordt door moleculaire imbibitie een deel der vloeistof opgenomen in de tusschen de epitheliumcellen gelegen kitsubstantie, of ook in de cellen zelven; vervolgens zet die vloeistof door capillaire imbibitie haar weg door de bindweefselspleten der mucosa voort en wordt voor een klein gedeelte met den lymphstroom mede gevoerd. Grootendeels echter wordt ze door moleculaire imbibitie in de kitsubstantie van het capillair endothelium of ook in de cellen

zelve opgenomen om door capillaire imbibitie in de haarvaten over te gaan.

Nu is het imbibeerend vermogen der weefsels beperkt: een bepaald volumen weefsel kan slechts een beperkte hoeveelheid vloeistof opnemen, en na eenigen tijd zou een maximale zwelling van het slijmvlies bereikt zijn en de imbibitie ophouden, indien niet de in de bloedcapillaria getreden vloeistof met den bloedstroom werd afgevoerd.

Bij den overgang nu van vocht in de capillaria zijn behalve de imbibitie nog twee andere factoren werkzaam:

1°. een kracht, die de vloeistof uit de weefselspleten met den capillairen bloedstroom meesleurt en die groeit met de stroomsnelheid van het bloed;

2°. de intraintestinale drukking.

Van deze beide factoren heeft de intraintestinale drukking een overheerschende beteekenis. Niet alleen toch brengt een verhooging dier drukking een aanzienlijke vermeerdering van resorptie teweeg, maar de grootte der intraintestinale drukking is zelfs voor het al of niet tot stand komen der resorptie beslissend.

Immers laat men haar kunstmatig beneden een zekere waarde dalen dan houdt de resorptiestroom op.

Bij de honden, die ik onderzocht, is die waarde gelegen tusschen een drukking van 0 en ½ cM. Na Cl-oplossing. In het normale leven komt echter zulk een lage intraintestinale drukking niet voor. In de eerste plaats toch, ondervinden bij iedere ademhaling de ingewanden een drukking van diaphragma en buikspieren, die reeds veel grooter is dan ½ cM. en in de tweede plaats oefenen de ingewanden door hun eigen gewicht een drukking op elkander uit, die bij de peristaltische beweging telkens nog plaatselijk verhoogd wordt.

Het is bij deze voorstelling gemakkelijk in te zien, dat de intraintestinale drukking waarbij de resorptiestroom ophoudt, gelegen moet zijn beneden de bloedsdrukking in de capillaria. Hoever zij daaronder ligt, hangt af van de kracht, welke de imbibitie en de meesleurende werking van den bloedstroom vertegenwoordigen.

Nadere bijzonderheden omtrent het bovenstaande zullen weldra in een uitgebreider opstel volgen.

Natuurkunde. — De Heer Kamerlingh Onnes biedt voor de werken der Afdeeling twee verhandelingen aan, getiteld: 1°. „*De gewijzigde compressor van* Cailletet *van het Natuurkundig Laboratorium te Leiden*"; 2°. „*Beschrijving van de inrichtingen met welke in het Natuurkundig Laboratorium te Leiden een permanent bad van vloeibare zuurstof verkregen wordt*".

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt voor het Zittingsverslag aan: „*Opmerkingen over het vloeibaar maken van waterstof, over thermodynamische gelijkvormigheid en over het gebruik van vacuumglazen*".

1. In aansluiting aan eene mededeeling van SOLVAY heeft CAILLETET den 30 Dec. ll. in de Académie des Sciences het vloeibaar maken van waterstof ten dienste van daarmede te verrichten proeven ter sprake gebracht. Met de studie van eene voor dit doel bestemde methode hield ik mij reeds sedert eenige jaren bezig. Eene methode die op een dergelijk beginsel berust, blijkt nu reeds vroeger door SOLVAY te zijn nagegaan en gepatenteerd met het oog op het vloeibaar maken van gassen voor industriëele doeleinden. Terwijl ik naar aanleiding van CAILLETET's mededeeling eenige opmerkingen neerschreef tot welke ik bij genoemde studie was gekomen, werden mij door de 14 Jan. ll. uitgegeven Proceedings van de Chemical Society van 19 Dec. ll. de schitterende proeven van DEWAR over afkoeling met behulp van sproeistralen van samengeperst gas bekend en heb ik mijne beschouwingen ook tot deze proeven uitgebreid.

2. Al veroorloven de hulpmiddelen en de omstandigheden van het Leidsche laboratorium ook niet, om het vraagstuk van het verrichten van proeven in vloeibare waterstof op den voorgrond te stellen, zoo is het toch te begeerlijk, een stap nader tot de geheimen van het nulpunt van de absolute temperatuur te komen en is de strijd tegen de weerbarstige waterstof in het land, waar v. MARUM het eerst een gas heeft vloeibaar gemaakt, te aantrekkelijk om dat vraagstuk uit de gedachten te kunnen verdringen. In mijne mededeeling van 29 Dec. '94 [1]) werden dan ook reeds eenige toestellen vermeld, aan welke, wanneer de gelegenheid zich voordeed, gewerkt werd ten einde later het reeds tot stand gebrachte permanente zuurstofbad op zulk een schaal te kunnen vergrooten, dat het afschenken van vloeibare waterstof mogelijk zal worden. Sedert tracht ik ten behoeve van de toen besproken metingen de mogelijkheid te verwezenlijken om zuurstof (of stikstof) in voldoende hoeveelheid onder den druk van slechts enkele millimeters te verdampen.

Met behulp van de voor dit doel bestemde pomp zal tevens een voldoende hoeveelheid waterstof in het zuurstofbad tot uiterst lage temperatuur kunnen worden afgekoeld.

---

[1]) Versl. der Zitt. v. d. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam 29 Dec. 1894.

3. Wanneer de temperatuur tot welke de waterstof kan worden afgekoeld en de hoeveelheid waterstof over welke per tijdseenheid bij deze afkoeling kan worden beschikt, gegeven is, zoo kan men de constructie van den meest voordeeligen toestel om deze waterstof door eigen expansie verder af te koelen bestudeeren met behulp van een model, werkende met een meer geschikte stof bij meer geschikte temperaturen.

Om van de uitkomsten bij zulk een model verkregen over te gaan tot de voorspelling van wat men bij den toestel tot afkoeling van waterstof mag verwachten kan men gebruikmaken van mijne stelling, dat de door v. d. Waals ontdekte overeenkomstige vloeistoftoestanden zoodanige zijn, dat de bewegingen der moleculen voor alle stoffen in een overeenkomstigen toestand voldoen aan de wet van de gelijkvormigheid in de mechanica [1].

Al de mechanische grootheden van welke de absolute eenheden als machten der grondeenheden van lengte, massa en tijd kunnen worden voorgesteld, zullen bij deze molecuulstelsels dus door dezelfde getallen worden uitgedrukt, wanneer men ze meet met het stelsel van absolute eenheden, opgebouwd op de grondeenheden van lengte, massa en tijd, die bij elke stof behooren. En al de mechanische grootheden bij de eene stof, in een willekeurigen toestand, kunnen uit die, welke bij de andere stof in den overeenkomstigen toestand behooren, worden berekend met behulp van de verhoudingsgetallen van de afgeleide absolute eenheden, met welke de bedoelde grootheden alsdan gemeten moeten worden De grondeenheden van lengte, massa en tijd van beide stoffen worden uit den kritischen toestand bepaald. Is M het moleculair gewicht, $v_\varkappa$ het kritisch volume van de gewichtseenheid, $\tau_\varkappa$ de kritische temperatuur van eene stof, dan is voor deze stof de massaeenheid evenredig aan M, de lengteeenheid aan $M^{1/3}v_\varkappa^{1/3}$, de tijdseenheid aan $M^{5/6}v_\varkappa^{1/3}\tau_\varkappa^{-1/2}$.

Tot die mechanische grootheden behooren in de eerste plaats drukoppervlak, volume, temperatuur (levende kracht van het zwaartepunt van een molecuul), arbeidsvermogen der moleculaire krachten, benevens de daarvan af te leiden grootheden, als uitzettingscoefficiënt enz., isothermische samendrukbaarheid, isothermische oppervlaktespanning enz. Verder de wrijving en de warmtegeleiding door moleculaire beweging.

Beschouwen wij thans nog die grootheden welke te pas komen wanneer arbeidslevering met temperatuurverandering gepaard gaat. De

---

[1] Verh. d. Kon. Akad. v. Wet. Deel XXI. Amsterdam 1881.

temperatuurverandering hangt in deze gevallen af van de hoeveelheid warmte, die uit het molecuul naar buiten kan treden, terwijl bij de afleiding van bovengenoemde stelling alleen op de levende kracht van voortbeweging der moleculen is gelet. Eene adiabatische temperatuursverandering zal dus bij twee stoffen alleen op overeenkomstige wijze plaats hebben, zoo er een zelfde verhouding bij beiden bestaat tusschen de levende kracht van voortgaande beweging der moleculen en het geheele arbeidsvermogen hetwelk in het molecuul bevat is. Maar het aantal vrijheidsgraden (het aantal atomen in het molecuul) moet bij de twee stoffen, die men vergelijken wil, hetzelfde zijn om afkoeling en verwarming op gelijkvormige wijze te doen plaats hebben. Voor normale stoffen, met een zelfde aantal atomen in het molecuul, zijn de overeenkomstige toestanden tevens thermodynamisch overeenkomstig [1]) Eene verdeeling van de stoffen in groepen, naar gelang van het aantal atomen in het molecuul, ligt dus bij de beschouwingen over overeenkomstige toestanden voor de hand.

Dat het aantal atomen op de adiabatische verschijnselen van invloed is, blijkt zeer fraai in de berekeningen welke v. d. Waals in 1878 uitvoerde [2]). V. d. Waals toonde toen reeds aan, dat het oververhitten van etherdamp bij adiabatische uitzetting, in tegenstelling met het oververzadigd worden van de dampen van water, te wijten is aan het groote aantal atomen, welke het ether-molecuul bevat. Hij wees er verder op, dat de nevelvorming door zuurstof, bijv. in de buis van Cailletet, door velen als vanzelf sprekend gevolg daarvan beschouwd, dat de zuurstof vloeibaar kan worden, inderdaad slechts in die mate op kan treden, omdat tevens het aantal atomen in het zuurstof-molecuul klein is.

Uit de bovenstaande beschouwingen omtrent het thermodynamisch al of niet gelijkvormig zijn van normale stoffen ligt de gevolgtrekking voor de hand, dat de omkeerpunten van de specifieke warmte

---

[1]) Riecke (Ann. d. Phys. u. Chem. 53. p. 388, 1894) heeft in de entropie en de thermodynamische potentiaal, berekend uit de isotherme van v. d. Waals, de gereduceerde waarden voor druk, volume en temperatuur ingevoerd en merkt daarbij op, dat functiën van de individueele eigenschappen van de stof in de uitdrukking voor de thermodynamische potentiaal overblijven. Neemt men volgens eene vriendelijke opmerking van Prof. Lorentz als nulpunt van entropie, die welke bij den kritischen toestand behoort, dan geven ook de formules van Riecke voor alle stoffen met eenzelfde aantal atomen in het molecuul dezelfde functiën van gereduceerde druk, volume en temperatuur voor entropie en thermodynamische potentiaal, of m. a. w. in de gereduceerde grootheden uitgedrukt is het oppervlak van Gibbs voor alle stoffen met hetzelfde aantal atomen in het molecuul hetzelfde. De boven gegeven afleiding is onafhankelijk van den bijzonderen vorm, dien men voor de isotherme aanneemt.

[2]) Versl. en Med. d. Kon. Akad. Amsterdam. 1878, p. 169.

van verzadigden damp in het algemeen niet op overeenkomstige temperaturen liggen [1]). Deze gevolgtrekking werd, blijkens vriendelijke mededeeling door Prof. v. d. Waals, gelijk de geheele beschouwing van thermodynamisch gelijkvormige toestanden, reeds vroeger op zijne colleges behandeld.

Keeren wij thans tot de thermodynamisch overeenkomstige stoffen terug. Brengt men twee zulke stoffen in gelijkvormige machines, en stelt men deze met overeenkomstige snelheden in beweging, dan zal de werking der machines eene gelijkvormige zijn, zoolang door de wanden van de machines overeenkomstige warmtehoeveelheden worden toe- en afgevoerd in overeenkomstige tijden.

Wanneer men dus in een model, dat met zuurstof werkt na een zekeren tijd een zekere hoeveelheid vloeibare zuurstof afgescheiden verkrijgt, zoo zal in de overeenkomstige met waterstof werkende toestel na den overeenkomstigen tijd een overeenkomstig volume vloeibare waterstof worden verkregen.

Aan de toepassing van deze redeneering op werkelijke toestellen staan eenige moeilijkheden in den weg. Zoo is de zwaartekracht in overeenkomstige toestanden niet een overeenkomstige kracht. Terwijl de versnelling welke twee molecuulen in overeenkomstige toestanden ten gevolge der moleculaire werkingen in twee gelijkvormige standen ondervinden in de maat die aan het stelsel eigen is uitgedrukt, door dezelfde getalwaarde worden voorgesteld, zal in 't algemeen de versnelling der zwaartekracht door verschillende getallen worden uitgedrukt en door deze dan de gelijkvormigheid in de beweging verbroken worden. De redeneering zal dus streng slechts toegepast mogen worden wanneer de werking van de zwaartekracht op den toestel te verwaarloozen is (dus ook de convectie bij het uitwisselen van warmte). Wij vestigden reeds de aandacht op de warmtegeleiding tengevolge van de beweging der atomen in het molecuul, door te spreken van warmtegeleiding door molecuulaire beweging.

Eindelijk zal het in het algemeen niet zonder bijzondere kunstgrepen mogelijk zijn wanden te verkrijgen, die zoodanig geleidingsvermogen en specifieke warmte hebben, dat zij overeenkomstige hoeveelheden warmte in overeenkomstige tijden toevoeren.

Doch ook met deze beperkingen kan de opvatting van het gas in de machine, als een deel van de machine zelve, bij de vraagstukken, die wij op het oog hebben, van nut zijn.

Een belangrijk voorbeeld van thermodynamisch gelijkvormige

[1]) In tegenstelling met de hypothese van Natanson. Bull.de l'Ac. d. Sc. de Cracovie. 1895 p. 141.

processen levert de door Olszewski uitgedachte scherpzinnige methode ter bepaling van den kritischen druk, door welke het hem gelukt is met uiterst geringe hulpmiddelen — in vele opzichten waarschijnlijk geringer dan die, welke mij ten dienste staan, — de lang gezochte kritische temperatuur en druk van waterstof te vinden [1]).

4. De wijze op welke ik mij voorgesteld had te komen tot de lage temperaturen, die noodig zijn om de waterstof vloeibaar te maken, berustte op het bezit van een permanent bad van vloeibare zuurstof. Terwijl bij de expansie van waterstof in eene buis van CAILLETET de lage temperatuur slechts zeer kort blijft bestaan, omdat de waterwaarde van het samengeperste gas ten opzichte van de wanden van het vat, waarin het zich bevindt, zoo bijzonder gering is, zullen bij het herhalen van de expansie met telkens nieuw toegevoerde, in het bad van vloeibare zuurstof afgekoelde, hoeveelheden waterstof, gelijk dit in een motor geschieden kan, de wanden in temperatuur gaan dalen, totdat de waterstof verder uitstroomt op eene temperatuur, die nagenoeg overeenkomt met den gekozen graad van expansie. Ik wenschte dit proces te bespoedigen en voort te zetten door de afgewerkte waterstof de toegevoerde te doen afkoelen. Het vraagstuk wordt dus met een motor van zoo klein mogelijk volume binnen een bepaalden tijd een zoo groot mogelijke hoeveelheid arbeid aan een gas te onttrekken en daaraan een regeneratorproces toe te voegen. De oplossing stelde ik mij eenigszins als volgt voor:

De samengeperste en afgekoelde waterstof wordt door een roodkoperen spiraal geleid naar een kleinen, snelloopenden, door de waterstof gedreven motor (0.1 liter cylinder-inhoud). De binnenwand van den cylinder en de zuiger of plunger zijn met isoleerende stoffen bekleed. De zuiger bij een dubbelwerkenden of de dompelaar bij een enkelwerkenden motor is nauwkeurig passend in den cylinder geslepen en beweegt zich daarin zonder wrijving [2]). De expansie wordt door kleppen geregeld, bewogen door stangen die zonder warmtegeleiding werken en wier pakkingen buiten het bereik der koude zijn gebracht, op de wijze als dit bij de kranen zonder warmtegeleiding in het zuurstof-kookglas (l. c. § 8) het geval is. De pakkingen van de zuigerstang of dompelaar zijn op dergelijke wijze van den cylinderwand geïsoleerd en door verlengingsbuizen van het werkende gas verwijderd. Ook het drijfwerk, dat men natuurlijk een

---

[1]) Bullet. Intern. Cracovie 1891. S. 192, 1895 Juni S. 192.

[2]) Een dergelijke inrichting werd bij den hulpcompressor (l. c. § 3) uitgevoerd en voldeed goed.

arbeid moet laten verrichten, opdat de machine behoorlijk loope, is van de werkende deelen geïsoleerd. De afgewerkte waterstof wordt weggeleid om een tweede roodkoperen, aan het einde door een kraantje gesloten, toevoerspiraal van samengeperste waterstof, en daarna door eene caoutchoucbuis, binnen welke de beide toevoerspiralen zijn opgenomen.

In de eerste plaats waren de moeilijkheden van werktuigkundigen aard te overwinnen. Als proeftoestel om de mechanische werking te bestudeeren, moest natuurlijk eerst een kleine motor met regeneratorspiraal vervaardigd worden, die, met samengeperste lucht gedreven, zichzelven afkoelen kon.

Terwijl de spiralen voor warmteuitwisseling in isoleerend omhulsel gemakkelijk te vervaardigen waren, en ook tot het verrichten van eene proef een houten cylinder met zuiger aan een trouwens zeer gebrekkig drijfwerk werd verbonden, kwam die proef echter niet tot uitvoering. Wrijving van den zuiger kon niet zonder belangrijke lekkage vermeden worden. De eenige mogelijkheid bleef, wat dit betreft, den motor snel te laten loopen, wat het drijfwerk weder niet toeliet. Doch vooral gelukte het niet de expansie goed te regelen. Sedert het begin van 1892 heb ik nu met dezen, dan met genen constructeur van gedachten gewisseld om een zich zelven afkoelenden motor, of anders een voor gewone omstandigheden berekend motortje van 10-malige of zelfs maar van 5-malige expansie, door kleppen en met een cylinderinhoud van 0.1 Liter, te verkrijgen, teneinde dan, naar dit voorbeeld, een zich zelven afkoelenden motor, geschikt voor het laboratorium, uit te werken. Doch ik ben daarin niet geslaagd.

Kon naar mijn plan een zich zelf afkoelend motortje (en dan natuurlijk ook gemakkelijk een cascade) worden uitgevoerd, dan zou dit zeker een belangrijk hulpmiddel voor laboratoria worden, want samengeperste lucht is gemakkelijk in voorraad te verzamelen [1]) en wordt waarschijnlijk weldra een goedkoop handelsartikel.

Het blijkt nu dat SOLVAY reeds vroeger het denkbeeld van een zich zelven afkoelenden motor uit een industrieel gezichtspunt heeft uitgewerkt, doch ook niet tot een bevredigende uitkomst is gekomen, al werden ook temperaturen (— 95°) bereikt, die voor een laboratorium zeer begeerlijk zijn.

Wanneer men de door SOLVAY verkregen daling van temperatuur zich verder uitgestrekt denkt, zoo moet er ook op gelet worden, dat

---

[1]) Ik heb daarbij in het bijzonder op het oog de zoo geschikte BROTHERHOOD machinetjes (l. c. § 10).

het regeneratorproces des te gebrekkiger zal werken naarmate het gas dichter bij de kritische temperatuur komt. In het algemeen zal alleen eene *cascade van theoretisch volmaakte afkoelingstoestellen* in staat blijken om, bij uiterst lage temperaturen, warmtehoeveelheden te onttrekken, die eenigzins in vergelijking komen met die, welke men uit het opgeofferd arbeidsvermogen zou meenen te mogen afleiden. Stelt men zich voor dat in die cascade ook verdampende vloeistoffen zijn opgenomen, zoo is de besproken motor weder noodig in de rol van den „Speisecylinder", op welke ZEUNER reeds zoolang de aandacht heeft gevestigd. Immers, deze dient om het theoretisch belangrijke nadeel weg te nemen, hetwelk opgeleverd wordt doordat, bij eene circulatie van verdampende vloeistof, de straal van vloeistof uit den condensator door een regelkraan in den refrigerator treedt, waar een veel lagere druk heerscht. Bij eene cascade, zooals die, welke te Leiden is uitgevoerd, herhaalt zich deze schadelijke afwijking van het theoretisch proces in elke circulatie; de zuurstof geeft daarbij in het product den meest belangrijken factor.

De in deze § besproken vraagstukken komen bij de technici ongetwijfeld meer en meer aan de orde en misschien kunnen de vorige opmerkingen eenig nut hebben bij het herhalen van proeven op de wijze van SOLVAY. Is een dergelijke toestel voor het vloeibaar maken van zuurstof gevonden, zoo levert de stelling van § 3 het overeenkomstige waterstofapparaat.

Voor de opzameling van waterstof volgens de expansie-methode, blijft voorloopig nog het middel, dat men in een cylinder met zuiger of plunger, waarbij men dan waarschijnlijk als cylinder een dikwandige buis, zooals die welke WROBLEWSKI en OLSZEWSKI voor de zuurstof gebruikte, kan nemen, herhaaldelijk met behulp van door de hand te stellen kraantjes, waterstof toelaat en na voldoende expansie weder af laat blazen. Voor het aanvoeren van de waterstof kan men gebruik maken van de bekende staalcapillairen (vergl. l. c. § 3). De dikwandige buis zou door een eng aansluitend vacuumglas van DEWAR, gelijk ik voor dergelijke doeleinden heb laten vervaardigen, tegen warmtetoevoer beschut moeten zijn.

5. Na de moeilijkheden, op welke ik bij het uitvoeren van het in de vorige § besproken ontwerp van een zich zelven afkoelenden motor gestuit was, lag het voor de hand terstond, toen de geniale vinding van LINDE bekend werd, na te gaan, of deze methode niet op het vloeibaar maken van de waterstof kon worden toegepast.

LINDE perst gas onder hoogen druk langs een regenerator-spiraal door een reduceerventil en laat het gas, nadat het op deze wijze arbeid tegen de moleculaire krachten verricht heeft, en daardoor

afgekoeld is, langs de regeneratorspiraal naar den compressor terugstroomen. De rol, die in den toestel van SOLVAY en mijn ontwerp de motor vervult, wordt bij LINDE's toestel door het reduceerventil overgenomen.

Theoretisch is dit een nadeel en komt het gebruik van het reduceerventil neer op een opoffering van arbeidsvermogen, dat tot afkoeling kon worden gebruikt. Wanneer later, bij de methode van LINDE, gezocht zal worden om het verlies door wrijving zoo gering mogelijk te maken, zal men tot de toevoeging van een motor als in § 4 komen. Theoretisch is ook de regenerator in LINDE's toestel, ten gevolge van den aard der moleculaire krachten, gebrekkig. Voor zoover ik over de methode van LINDE kan oordeelen, zou, gelijk aan het slot van deze § nader wordt toegelicht, om den regenerator tot een volkomen regenerator te maken, aan LINDE's toestel eene afkoelingsmachine moeten worden toegevoegd, die op elke temperatuurstrap aan het toestroomende gas die warmte onttrok, welke het tusschen twee opvolgende trappen meer moet afstaan, dan het terugstroomend gas kon geven. Maar in het geval van het vloeibaar maken van waterstof, is de uiterste beknoptheid van den gebruikten toestel van het grootste gewicht, en kan men aan de wrijving en aan niet omkeerbare warmteovergangen opofferen, wat men aan schadelijken warmtetoevoer naar den toestel bespaart.

De meest belangrijke vraag is wel deze: of de moleculaire krachten, op welke de proef van JOULE en THOMSON, en dus ook de methode van LINDE berust, voldoende zijn om merkbare afkoeling bij de doorstrooming van het reduceerventil te krijgen, en binnen niet al te langen tijd tot de gewenschte lage temperatuur te komen.

Bij gewone omstandigheden zijn deze temperatuurveranderingen voor waterstof uiterst gering. Bij de gewone temperatuur en bij 90° ongeveer, vonden JOULE en THOMSON, bij hunne proeven in 1862, zelfs eene verwarming en wanneer men in de formule, door welke v. D. WAALS in 1873 het eerst het bedrag der door JOULE en THOMSON gemeten temperatuurveranderingen uitdrukte (Continuiteit p. 110), de elders in hetzelfde werk gegeven waarden der moleculaire constanten voor waterstof substitueert, vindt men inderdaad voor de afkoeling eene negatieve waarde.

Is dit alles juist, dan zou een LINDE-apparaat met waterstof aan het werk gesteld, wel verre van eene afkoeling te geven, eene voortschrijdende *verwarming* van het door het reduceerventil stroomende gas geven. Doch wil men beoordeelen wat er gebeuren zal wanneer men waterstof bij lage temperaturen in den toestel brengt, zoo moet men letten op de verandering der moleculaire werkingen met de temperatuur.

Met het oog op deze verandering, heeft v. d. WAALS in plaats van de vroeger standvastiggestelde moleculaire attractie a, daarvoor later de waarde $a_{\varkappa} e^{\frac{T_{\varkappa}-T}{T_{\varkappa}}}$ opgegeven, waar $a_{\varkappa}$ wederom eene constante, T de absolute temperatuur en $T_{\varkappa}$ de absolute kritische temperatuur van de beschouwde stof is, zoodat a met dalende temperatuur aangroeit.

Trouwens, de stelling omtrent de mechanische gelijkvormigheid van overeenkomstige toestanden (§ 3) sluit in zich, dat het moleculair arbeidsvermogen bij alle normale stoffen met groote benadering op overeenkomstige wijze met de temperatuur verandert. Volgens die stelling, zullen wij bij waterstof, bij lagere temperaturen, het normale gedrag bij de proef van JOULE en THOMSON vinden. Er moet dus, volgens de proeven van 1862, ook een omkeerpunt in het verschijnsel van JOULE en THOMSON bestaan, waaruit dan volgt, dat dit bij alle normale stoffen bij overeenkomstige, m. a. w. bij genoegzaam hooge temperatuur, zal optreden. Verder zullen wij, bij genoegzaam lage temperaturen, bij waterstof een betrekkelijk groot moleculair arbeidsvermogen van plaats vinden, zoodat wij merkbare afkoeling in de proef van JOULE en THOMSON en dus ook een goede werking van het LINDE-apparaat mogen verwachten.

Zoodra ik de methode van LINDE leerde kennen, kwam het mij dan ook voor, dat zij een zeer geschikt middel was om waterstof vloeibaar te maken. De waterstof kan dan in een kookglas, zooals het l.c. § 8 beschrevene, worden afgetapt.

Uit OLSZEWSKI's kritische grootheden van waterstof volgt, met de stelling van § 3, dat wanneer wij in een LINDE-apparaat beschikken kunnen over waterstof, toegevoerd bij een temperatuur van —210°, als model om de meest gunstige werking te bestudeeren, gebruikt kan worden een toestel, werkende met tot —20° afgekoelde zuurstof, aan welke in een 2.33 langeren tijd een zelfde aantal moleculen zuurstof moet worden toegevoerd, als hetwelk wij aan het waterstofapparaat per eenheid van tijd denken toe te voeren. De druk die op het waterstofapparaat werkt kan 2.54 maal kleiner zijn, de lineaire binnenafmetingen van het waterstofapparaat kunnen alle 1.164 maal kleiner genomen worden, en de tijd, na welke zich een volume vloeibare waterstof zal vertoonen, 1.58 maal kleiner dan dat, hetwelk wij bij de zuurstof waarnemen, zal 2.33 maal kleiner zijn.

Op de veranderlijkheid van het moleculair arbeidsvermogen behoefde niet het hoofdgewicht te worden gelegd, zoolang wij de vraag stelden of LINDE's methode bruikbaar zoude zijn voor het vloeibaar maken van waterstof. Zijn wij voldaan over de werking van het

model met zuurstof, dan zullen wij dit ook zijn over het overeenkomstige apparaat met waterstof. Nu het eerste in de nijverheid wordt toegepast, kunnen wij het laatste misschien weldra bewonderen.

Eene andere vraag is het, in hoeverre wij over ons model dat met zuurstof werkt, afgezien van het reeds behandelde reduceerventil, tevreden mogen zijn. Om te beoordeelen in hoeverre de regenerator in LINDE's apparaat van een volkomen regenerator afwijkt, is de veranderlijkheid van de moleculaire attractie met de temperatuur een allerbelangrijkst gegeven. Immers, die veranderlijkheid moet zich daarin bemerkbaar maken, dat een gegeven gewichtshoeveelheid terugstroomend gas, hetwelk zich onder hoogen druk bevindt, tusschen twee bepaalde temperaturen minder warmte kan afgeven dan een zelfde gewichtshoeveelheid toestroomend gas, hetwelk zich onder hoogen druk bevindt, noodig heeft om de temperatuursverandering tusschen diezelfde temperaturen in omgekeerden zin te ondergaan. En wanneer het apparaat tot geregelde werking is gekomen, moet er voortdurend, behalve eene gewichtshoeveelheid toestroomend gas, gelijk aan het terugstroomend gas, nog zooveel toestroomend gas worden afgekoeld als in den vorm van vloeistof uit het apparaat wordt afgetapt.

Het is een wezentlijk deel van de methode van LINDE, dat het gas ter besparing van arbeidsvermogen slechts betrekkelijk weinig ontspannen wordt en dat, met het oog op deze besparing, de meest gunstige begin- en einddruk zijn opgespoord. Een proces met grooteren ontspanningsgraad kan men gelijkstellen met twee opvolgende processen van LINDE, waarbij het tweede proces, en dus ook het gezamentlijke, ongunstiger zal werken, dan het eerste. Een proces met nog verdere ontspanning zal om dezelfde reden nog weder ongunstiger worden.

6. DEWAR is bij zijn sproeistralen met samengeperst gas, door het gas geheel te laten ontspannen, in het verkwisten van voor afkoeling beschikbaar arbeidsvermogen nog verder gegaan dan LINDE, en dus nog verder van het theoretisch meest gunstig afkoelingsproces afgeweken. Hij doet dit ten einde voor een klein breukdeel van de gebruikte stof veel sneller alleraanzienlijkste temperatuurverlagingen te verkrijgen.

Ook in mijn kookglas is, als bij de proeven van DEWAR, de toevoerspiraal aan het einde met een kraantje voorzien en om den kraandrager gewonden, en wordt dit deel van den toestel in het wegstroomende gas gedompeld (l. c. § 8). Hetgeen van den sproeistraal aan nevel en vloeistof weggeblazen wordt, dient tot afkoeling

van de toevoerspiraal en verder tot het opnemen van warmte, die anders aan het bad van vloeibare zuurstof zou zijn toegevoerd. Maar in de toevoerspiraal bevindt zich de zuurstof reeds in vloeibaren toestand. Zoodra uit de fijne kraan aan het uiteinde van de toevoerspiraal geen vloeistof meer uittreedt, wordt deze dan ook gesloten (verg. l. c. pag. 178) en wel geschiedt dit om zoo min mogelijk gas te verbruiken. Bij vorige constructiën van mijn kookglas, waren toevoerspiralen van grooter afkoelend oppervlak in het wegstroomend gas gedompeld, ten einde ook met gas, dat vooraf maar even beneden de kritische temperatuur of alleen maar tot dicht bij de kritische temperatuur was afgekoeld, een vloeistofstraal te vormen. Het bleek echter doelmatiger om bij de constructie van het permanente bad van vloeibare zuurstof er op te rekenen, dat de zuurstof, vóór zij naar het kookglas werd gevoerd, sterk werd afgekoeld. De spiraal werd dus ingekort tot niet meer dan noodig scheen om de weggeblazen vloeistof op te vangen en de verdamping daarvan tot afkoeling van de toevoerspiraal te gebruiken. DEWAR daarentegen heeft zich niet af laten schrikken door het minder zuinig gebruik van gas en heeft, gewapend met zijn vacuumglas, dat al het wegstroomend gas tot afkoeling van het toestroomende beschikbaar laat, zijn aandacht uitsluitend gevestigd op het doen dalen van de temperatuur. Hij slaagde er op deze wijze zelfs in, zuurstof te doen bevriezen: een schitterende uitkomst van zijne gelukkige onderzoekingen.

Passen wij op de proeven van DEWAR weder de stelling van § 3 toe. DEWAR gaat feitelijk, zoover het de keuze van temperaturen betreft, ook zelfs volgens deze stelling te werk. De toestel, die door sproeistralen eene bevredigende hoeveelheid vloeibare zuurstof levert, kan als model dienen om daarnaar een waterstofapparaat te bouwen. Dezelfde verhoudingsgetallen, als die welke bij de bespreking voor het LINDE-apparaat werden opgegeven, gelden hier weder bij het kiezen der afmetingen, drukkingen en temperaturen. Het procentisch deel van de gebruikte waterstof, dat na een zekeren tijd zal zijn vloeibaar geworden, zal dan hetzelfde zijn als het procentisch deel, dat na een 2,33 maal langeren tijd in het zuurstofmodel vloeibaar wordt.

Niet echter mag de stelling van § 3 worden toegepast op de hoeveelheid vloeistof, die zich in beide gevallen op den bodem van een overeenkomstig vat zal verzamelen. Want de versnelling der zwaartekracht zal, in het stelsel der aan de moleculen ontleende eenheden, worden uitgedrukt door een 3,43 maal grooter getal bij zuurstof dan bij waterstof, en dus zou men zich met het zuurstofmodel naar een plaats moeten begeven, waar de zwaartekracht 3,43

maal kleiner is, om uit de dan op den bodem zich verzamelende hoeveelheid af te leiden, hoeveel men bij de waterstof mag verwachten. Het valt in het oog dat de zuurstofspray onder die omstandigheden moeilijker vloeibare zuurstof af zou scheiden. Het zal dan ook wel noodig zijn om in een afzonderlijk in het met de waterstofspray afgekoeld cylindervormig of spiraalvormig vat, de gelegénheid aan samengeperste waterstof te geven om vloeibaar te worden. Onder geringeren druk kan deze dan met minder snelheid dan de spray uitstroomen in een glas, dat in hoofdzaak geconstrueerd is als het door mij beschreven kookglas met kookkast voor vloeibare zuurstof (vergl. l. c. § 8), terwijl in die kookkast tevens de regeneratorspiraal een geschikte plaats kan vinden [1]).

7. Naarmate het meer van belang wordt, bij uiterst lage temperaturen adiabatische processen uit te voeren, zullen ook de vacuumglazen van DEWAR van grooter belang worden. Zij schijnen mij de belangrijkste toevoeging aan de hulpmiddelen voor het onderzoek bij lagere temperaturen, dat sedert 1883 verkregen is.

De voortreffelijkheid van deze vacuumglazen is ook weder bij de proeven, die in de vorige § werden besproken, gebleken.

De vacuumglazen maken het gemakkelijk om in andere localen van een laboratorium dan waar de cryogene toestellen zijn opgesteld, en zelfs in andere laboratoria, met vloeibare gassen te werken. Een dergelijk vacuumglas met vloeibare zuurstof nam ik bij gelegenheid van een bezoek mede om de eigenschappen der vloeibare zuurstof te vertoonen, en daarna in het laboratorium teruggekeerd kon ik de overgebleven zuurstof uit het vacuumglas weder in mijn kookglas schenken.

Om vloeibare zuurstof uit mijn kookglas in een vacuumglas over te brengen, wordt gebruik gemaakt van een glazen emmertje, hangende aan een glazen staafje, dat door een op het kookglas passende caoutchoucstop kan worden op- en neergeschoven. Bij het uitnemen van het emmertje, vervangt men dezen stop tijdelijk door een andere.

Van de vacuumglazen kan verder ook in vele gevallen partij worden getrokken, ten einde de verdamping van het bad nog geringer te maken dan zij reeds is. Ik heb daartoe een komvormig vacuumglas laten vervaardigen, juist passende om het benedendeel dat het vloeibare gas bevat. Alleen bij metingen, die uitsluitend door paral-

---

[1]) Ten einde samengeperste waterstof vloeibaar te maken, blijkt OLZSEWSKI, volgens mededeeling van RAMSAY, een geringe hoeveelheid ook door de expansie van eene andere hoeveelheid te hebben afgekoeld.

lelle wanden heen verricht moeten worden, kan dit hulpmiddel niet worden toegepast. (l. c. § 8).

In § 4 vermeldde ik reeds de toepassing van een vacuumglas in den vorm van een lange dubbele reageerbuis, ten einde een dikwandige buis met een vacuumwand te voorzien.

Ook wanneer men de vacuumglazen niet met zoo pijnlijke zorgvuldigheid vervaardigt als de allerfraaiste van DEWAR, kunnen zij groote diensten bewijzen. Men raadplege, om dit te beoordeelen, de tabel door KUNDT en WARBURG in hun onderzoek over warmtegeleiding in hooge vacua [1]).

Om grootere voorwerpen te isoleeren, kan men rechte, eivormige, ringvormige of anders gevormde luchtledig gepompte en toegesmolten buizen van geschikte afmetingen (gloeilampglazen) opstapelen en met paraffine, wol, papier en vernis, als vorm gevende stoffen, tot een doorloopende, de confectie afsluitende wand vereenigen. Op deze wijze kunnen vaten van willekeurigen vorm of afmeting worden opgebouwd, met zeer weinig geleidende wanden van geringe waterwaarde, wier cellen of elementen uit vacuumbuizen bestaan. Zij herinneren aan den mantel, die de ethyleenkookflesch (l. c. § 5) beschermt.

Wil men eene luchtledige ruimte tusschen twee van elkaar geisoleerde metalen wanden aanbrengen, zoo zal het daarbij van voordeel zijn, de te isoleeren wanden te bouwen met versterkingsribben, gelijk de zeer dunwandige ethyleenkookflesch (l. c. § 5) en zuurstofkookkast (l. c. § 8). Het is een verblijdend vooruitzicht, dat de technici wel spoedig behoefte zullen gevoelen aan dergelijke niet geleidende mantels. Dan toch staan tal van hoofden en handen gereed om het vraagstuk van den wetenschappelijken onderzoeker over te nemen.

— Voor de bibliotheek worden aangboden: door den Heer MICHAËLIS een exemplaar van het door hem geschreven werk: „*Spoorwegbruggen over Hoofdrivieren*", 1e Afdeeling; en door den Heer STOKVIS een exemplaar der Fransche vertaling van zijne „*Lessen over de Pharmacotherapie*".

— De Vergadering wordt gesloten.

---

[1]) Monatsber. Kön. Akad. Berlin 25 Febr. 1875. pg. 171.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN.

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 29 Februari 1896.

Voorzitter: de Heer H. G. van de Sande Bakhuyzen.
Secretaris: de Heer C. A. J. A. Oudemans.

Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (5 Februari 1896) ter begeleiding van de stukken der Royal Society, aan Z.E. naar aanleiding van een besluit der Januari-Vergadering ter visie toegezonden.

2°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (25 Februari 1896), de voorwaarden behelzend, waarop Z.E. geneigd is den Heer Dr. D. J. Korteweg, als gedelegeerde der Nederlandsche Regeering, naar Londen af te vaardigen, ter bijwoning van de driedaagsche vergadering, uit te schrijven door de Royal Society ter vaststelling van voorloopige regelen, die bij de samenstelling van een algemeenen Catalogus van wetenschappelijke werken gevolgd zouden kunnen worden.

De Heer KORTEWEG, wien gelegenheid gegeven was, van den inhoud der ministerieele missive kennis te nemen, verklaart dat hij met de gestelde voorwaarden genoegen neemt. Hij geeft echter in bedenking den Minister nu reeds op de mogelijkheid te wijzen, dat deze eerste bijeenkomst door andere gevolgd zal worden, doch vertrouwt in deze op de prudentie van het Bestuur.

3°. Brief van den Minister van Justitie (6 Februari 1896) waarin Z.E. zich bereid verklaart, met de Leden der Commissie voor de strafgevangenissen, zonder tusschenkomst der Afdeeling, te onderhandelen, hetzij om tijd te sparen, of om andere redenen, door de Commissie te beoordeelen.

4°. Brief van den Maire van Dole (8 Februari 1896), waarin dank wordt gezegd voor de geldelijke bijdrage, hem uit naam der Afdeelingsleden toegezonden voor het te stichten monument ter herinnering aan wijlen den Hoogleeraar LOUIS PASTEUR.

5°. Brief van den Heer B. BAILLAUD, doyen honoraire der Faculté des Sciences te Toulouse (28 Februari 1896), waarin machtiging verzocht wordt om al wat door wijlen onzen landgenoot, den Heer Dr. T. J. STIELTJES JR., in leven Hoogleeraar in de Wiskunde te Toulouse, indertijd in het licht werd gegeven in de Verslagen en Mededeelingen der Afdeeling, in het Fransch vertaald, te mogen opnemen in de Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. De Voorzitter deelt mede, dat op dit vereerend verzoek terstond gunstig beschikt werd, en hoopt hiermede in den geest der Afdeeling gehandeld te hebben (Applaus).

6°. Brief van den Heer Dr. J. F. VAN BEMMELEN (29 Februari 1896), de kennisgeving behelzend, dat hij ophoudt Correspondent der Afdeeling te zijn, omdat hij, op zijn verzoek, door H. M. de Koning-Regentes eervol ontslagen werd uit den dienst van het Ned. Indisch Gouvernement.

7°. Brief van den Correspondent der Afdeeling Dr. J. P. VAN DER STOK, Directeur van het Meteorologisch Observatorium te Batavia, ter begeleiding van eene verzameling van 46 photographieën van wolken, door hem vervaardigd naar aanleiding van een besluit, genomen op het in 1894 te Upsala gehouden internationaal meteorologisch Congres. De zender hoopt dat deze toezending de belangstelling der Afdeeling voor deze vormen zoowel als voor de internationale onderneming moge opwekken.

Aan den Heer VAN DER STOK zal de dank der Afdeeling voor zijne zoo wèl geslaagde poging worden overgebracht.

8°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (18 Februari 1896), waarin advies wordt verzocht omtrent de vraag: of

het wenschelijk is, den Directeur van het physisch kabinet te Leiden toe te staan, gecomprimeerde gassen te vervaardigen, in bewaring te hebben en te gebruiken. Aanleiding tot deze vraag gaven verschillende adressen, ter kennisgeving aan den Minister aangeboden, waarin tegen het verleenen van verlof om zulke gassen in voorraad te mogen hebben werd opgekomen, uithoofde van de ontploffingen, welke daardoor kunnen worden veroorzaakt en de gevaren, waaraan dus menschen en gebouwen zouden worden blootgesteld. De Voorzitter meent, dat de gedane vraag, met de daaraan toegevoegde bescheiden en platten grond, in handen behooren gesteld te worden van eene Commissie, opdat deze de Afdeeling diene van voorlichting en raad, en benoemt tot Leden daarvan de Heeren VAN DER WAALS, LELY, KORTEWEG en HOOGEWERFF.

Al deze Heeren, ter vergadering tegenwoordig, nemen de benoeming aan.

Plantenkunde. — De Heer SURINGAR levert eene vierde „*bijdrage tot de kennis der Melocacti*", naar aanleiding van voorwerpen, onlangs door hem van het eiland St. Martin ontvangen.

De voorwerpen van St. Martin behooren tot den stam der *Melocacti communes*, en komen het naast overeen met die soort, welke LINK en OTTO onder den naam van *M. communis* var. *macrocephalus* hebben beschreven. Spreker heeft daaraan den naam gegeven van *M. (communis) Linkii*, en aan een eenigszins afwijkenden, aldaar eveneens voorkomenden, dien van *M. (communis) croceus*, waarbij de tusschen ( ) geplaatste namen de stamverwantschap uitdrukken.

Uit de vergelijking van deze vormen met den *Melocactus*, welken spreker op *St. Eustatius* heeft verzameld, en dien, welken HOOKER van *St. Kitts* heeft beschreven, blijkt, dat op deze, zeer nabij elkander gelegen eilanden, zich bijzondere, standvastige vormen van dezen gemeenschappelijken stam hebben gevormd.

Voorts heeft spreker aanleiding gevonden, om al de oudere opgaven, en vooral afbeeldingen, van *Melocacti*, van LOBELIUS in 1576 af tot aan de Monographie van MIQUEL in 1840 toe, bijeen te verzamelen en kritisch na te gaan. Hij vermeldt in het kort de resultaten van dit onderzoek, en biedt, in aansluiting met de vroeger, in de *Verslagen en Mededeelingen* van 1885, 1889 en 1893, opgenomen bijdragen, eene verhandeling voor de Werken der Akademie aan, met twee platen tot opheldering van het verband tusschen den *M. Lobelii* van het eiland Margarita bij Venezuela, den *M. Besleri*

van nog onbekenden oorsprong en de kromdoornige *Melocacti*, door spreker van het eiland Aruba beschreven, de andere betrekking hebbende op den stam der *M. communes* en de voorwerpen van St. Martin.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt voor het zittingsverslag een opstel aan: „*Over eene betrekking tusschen een stelsel confocale ovalen van Descartes en eene eenvlakkige hyperboloide.*

1. Stellen p en q de afstanden van eenig punt S tot de vaste punten P en Q voor, dan worden de ovalen van DESCARTES bepaald door eene lineaire vergelijking tusschen de bipolaire coördinaten p en q.

$$\alpha p + \beta q = \gamma f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Hier beteekent f de afstand der polen P en Q.

Duidt men door R een punt der poolas PQ aan, door g en h zijn afstanden tot P en Q, en door r zijn afstand tot het punt S, dan levert de toepassing van het theorema van STEWART de vergelijking

$$hp^2 + gq^2 = fr^2 + fgh \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Nu heeft CHASLES de opmerking gemaakt, dat men R zoo kan kiezen, dat de bedoelde kromme even goed door eene lineaire betrekking tusschen p en r, of ook door eene lineaire betrekking tusschen q en r wordt voorgesteld.

Ik wensch de aandacht te vestigen op eene eigenaardige methode, waardoor de bewering van CHASLES kan gestaafd worden.

Daartoe beschouw ik p, q en r als de rechthoekige coördinaten van een punt in de ruimte; vergelijking (2), of in anderen vorm geschreven,

$$\frac{p^2}{fg} + \frac{q^2}{fh} = \frac{r^2}{gh} + 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

stelt dan eene eenvlakkige hyperboloide voor.

Is het nu mogelijk de kromme van DESCARTES door eene lineaire vergelijking tusschen p en r te bepalen, dan zal deze vergelijking, te zamen met (1), eene rechte lijn aanwijzen, gelegen op de hyperboloide.

Wordt, ter bekorting der schrijfwijs,

$$fg = a^2, \quad fh = b^2, \quad gh = c^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

gesteld, zoodat

$$f = ab : c, \quad g = ac : b, \quad h = bc : a, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

dus, wegens

$$f = g + h, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

dan kan de vergelijking der hyperboloide in den vorm

$$\frac{p^2}{a^2} - \frac{r^2}{c^2} = 1 - \frac{q^2}{b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

geschreven worden.

De beide stelsels van rechten op het oppervlak kunnen dan aangewezen worden door de beide volgende paren van vergelijkingen.

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{p}{a} + \frac{r}{c}\right) \sin \psi &= \left(1 - \frac{q}{b}\right) \cos \psi \\ \left(\frac{p}{a} - \frac{r}{c}\right) \cos \psi &= \left(1 + \frac{q}{b}\right) \sin \psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{p}{a} + \frac{r}{c}\right) \sin \varphi &= \left(1 + \frac{q}{b}\right) \cos \varphi \\ \left(\frac{p}{a} - \frac{r}{c}\right) \cos \varphi &= \left(1 - \frac{q}{b}\right) \sin \varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Beschouwen we eerst het stelsel (9).

Door achtereenvolgens te elimineeren r, q en p, vindt men

$$\frac{p}{a} \sin 2\psi + \frac{q}{b} \cos 2\psi = 1 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$\frac{p}{a} \csc 2\psi - \frac{r}{c} \operatorname{ctg} 2\psi = 1. \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$\frac{q}{b} \sec 2\psi + \frac{r}{c} \operatorname{tg} 2\psi = 1. \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Laat nu gegeven zijn de vergelijking

$$\alpha p + \beta q = \gamma f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

dan zal men g, h en ψ steeds zoo kunnen bepalen, dat (1) met (11) identiek wordt.

De voorwaarden daarvoor zijn namelijk

$$\sin 2\,\psi = \frac{\alpha\,a}{\gamma f} = \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{f}}\,; \; \cos 2\,\psi = \frac{\beta\,b}{\gamma f} = \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{\frac{h}{f}}\,. \qquad (14)$$

dus

$$\alpha^2 g + \beta^2 h = \gamma^2 f\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15)$$

Daar $g + h = f$, zal men uit (15) de ligging van het punt R kunnen vinden.

Dan zijn tevens de vergelijkingen (12) en (13) bepaald; blijkbaar kunnen ze door toepassing der betrekkingen (14) worden omgezet in

$$\gamma p - \beta r = \alpha g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (16)$$

$$\gamma q + \alpha r = \beta h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (17)$$

Men kan uit (9) nog eene homogene lineaire vergelijking afleiden (vlak door den oorsprong van het coördinatenstelsel), namelijk

$$-\frac{p}{a}\cos 2\,\psi + \frac{q}{b}\sin 2\,\psi + \frac{r}{c} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (18)$$

of, in andere schrijfwijs,

$$-\beta h p + \alpha g q + \gamma f r = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (19)$$

De kromme van Descartes wordt dus, t. o. v. haar drie „brandpunten" als polen, aangewezen door eene homogene, lineaire, tripolaire vergelijking.

2. Het tweede stelsel rechten der hyperboloide, voorgesteld door de betrekkingen (10), geeft op soortgelijke wijs behandeld, aanleiding tot het opstellen der vergelijkingen

$$\frac{p}{a}\sin 2\,\varphi - \frac{q}{b}\cos 2\,\varphi = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (20)$$

$$\frac{p}{a} \csc 2\varphi - \frac{r}{c} \operatorname{ctg} 2\varphi = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$-\frac{q}{b} \sec 2\varphi + \frac{r}{c} \operatorname{tg} 2\varphi = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$\frac{p}{a} \cos 2\varphi + \frac{q}{b} \sin 2\varphi - \frac{r}{c} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Daar ook hier voldaan wordt aan $\alpha^2 g + \beta^2 h = \gamma^2 f$ (15), zullen deze vergelijkingen blijkbaar een tweede stelsel ovalen, met dezelfde brandpunten P, Q, R, bepalen.

We kunnen aantoonen, dat het bestaat uit de orthogonale trajectoren van het eerste stelsel.

Daartoe moet bewezen worden, dat door de beide krommen

$$\frac{p}{a} \sin 2\psi + \frac{q}{b} \cos 2\psi = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$p \sin 2\varphi - \frac{q}{b} \cos 2\varphi = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

voldaan wordt aan de betrekking

$$2pq\,(dp_1\,dp_2 + dq_1\,dq_2) = (p^2 + q^2 - f^2)\,(dp_1\,dq_2 + dp_2\,dq_1) \;.\; (24)$$

zie § 4 van mijn bijdrage „over bipolaire coördinaten" in het zittingsverslag van 25 Jan. 1896).

Nu vindt men voor elk snijpunt der beide krommen terstond

$$\frac{p}{a} = \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \quad \text{en} \quad \frac{q}{b} = \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)},$$

zoodat

$$\frac{p^2 + q^2 - f^2}{2pq} = \frac{a^2 \cos^2(\varphi - \psi) + b^2 \sin^2(\varphi - \psi) - (a^2 + b^2)\sin^2(\varphi + \psi)}{ab \sin 2(\varphi - \psi)} \;.\; (25)$$

Daar verder

$$dp_1 : dq_1 = -a \cos 2\psi : b \sin 2\psi$$

en

$$dp_2 : dq_2 = a \cos 2\varphi : b \sin 2\varphi$$

wordt

$$\frac{dp_1\,dp_2 + dq_1\,dq_2}{dp_1\,dq_2 + dp_2\,dq_1} = \frac{a^2 \cos 2\varphi \cos 2\psi - b^2 \sin 2\varphi \sin 2\psi}{ab \sin 2(\varphi - \psi)} \quad . \quad (26)$$

En nu ziet men gemakkelijk, dat de rechter leden van (25) en (26) tot denzelfden vorm zijn te herleiden.

Er is dus aangetoond, dat de vergelijking

$$\alpha p + \beta q = \gamma f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

twee stelsels van ovalen voorstelt, die elkander rechthoekig snijden, wanneer slechts α, β, γ voldoen aan de betrekking

$$\alpha^2 g + \beta^2 h = \gamma^2 f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

3. Het verdient opgemerkt te worden, dat van de drie polen P, Q, R er twee kunnen samenvallen.

Is namelijk

$$\alpha^2 = \gamma^2$$

dan wordt $h = 0$, $g = f$, en de punten Q en R vallen samen.

Dan vervalt de bovengenoemde ruimtevoorstelling, en bezit de kromme slechts *eene* bipolaire vergelijking van den *eersten graad.*

De bewuste krommen kunnen dan worden voorgesteld door de betrekking

$$\lambda q \pm p = f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

of, in poolcöordinaten, door

$$(\lambda q - f)^2 = q^2 + 2fq \cos \vartheta + f^2,$$

of door

$$q = 2f \frac{\lambda + \cos \vartheta}{\lambda^2 - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Hieruit blijkt, dat de bedoelde krommen limaçons van Pascal zijn.

Men kan gemakkelijk aantoonen, dat de vergelijkingen $p + \lambda q = f$ en $p - \lambda q = f$ de beide takken voorstellen van een limaçon met knooppunt. Daarentegen wijst de betrekking $-p + \lambda q = f$ op een limaçon met geisoleerd punt. In het eerste geval heeft men $\lambda^2 < 1$, in het tweede $\lambda^2 > 1$.

Dat men ook hier twee elkander rechthoekig snijdende stelsels van krommen heeft, zoodra men λ laat veranderen, blijkt aldus.

Uit

$$p + \lambda q = f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

volgt

$$\frac{dp}{dq} = -\lambda = \frac{p-f}{q},$$

dus

$$\frac{d(p+q)}{d(p-q)} = \frac{p+q-f}{p-q-f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

of als men stelt $\quad p + q = u$ en $p - q = v$,

$$\frac{du}{dv} = \frac{u-f}{v-f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Nu heeft men voor twee elkander loodrecht snijdende krommen (zie § 7 van mijn boven aangehaald opstel),

$$\frac{du_1\, du_2}{u^2 - f^2} = \frac{dv_1\, dv_2}{v^2 - f^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Derhalve wordt voor de orthogonale doorsnijdingskrommen van (29)

$$\frac{du}{u+f} = \frac{dv}{v+f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

waaruit, door integratie,

$$u + f = C(v + f) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

of ook

$$-p + \mu q = f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

4. Tot de hyperboloide terugkeerende, beschouw ik nog de doorsnede met een willekeurig vlak door den oorsprong,

$$r = \lambda p - \mu q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Voor haar projectie op het vlak POQ vindt men de vergelijking

$$(h - \lambda^2 f)\, p^2 + 2\, \lambda\, \mu\, f p q + (g - \mu^2 f) q^2 = f g h \quad . \quad . \quad (37)$$

Stelt men nu

$$h = \lambda^2 f \quad \text{en} \quad g = \mu^2 f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

waardoor

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1,$$

dan wordt

$$2\,\lambda\,\mu\,pq = gh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Vervangt men nog λ en μ door sin σ en cos σ, dan blijkt, dat de tripolaire vergelijking

$$r = p \sin \sigma - q \cos \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

dezelfde, uit twee ovalen samengestelde kromme van CASSINI aanwijst, als

$$4\,pq = f^2 \sin 2\,\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Omgekeerd zal men voor de kromme van CASSINI, voorgesteld door

$$pq = a^2, \; . \; . \; . \; . \; (a^2 < \tfrac{1}{4} f^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

twee punten, R en S, kunnen vinden, die tot een betrekking van den vorm (40) aanleiding geven, daar de hoek σ dan moet bepaald worden uit

$$\sin 2\,\sigma = 4\,a^2 : f^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Daar men de beide hoeken door σ en $(\frac{1}{2}\,\pi - \sigma)$ kan aanduiden, heeft men voor de bedoelde kromme

$$\left.\begin{array}{l} r = p \sin \sigma - q \cos \sigma \\ s = p \cos \sigma - q \sin \sigma \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Hieruit vindt men nog twee andere tripolaire vergelijkingen van den eersten graad,

$$\left.\begin{array}{l} p \cos 2\,\sigma + r \sin \sigma - s \cos \sigma = 0 \\ q \cos 2\,\sigma + r \cos \sigma - s \sin \sigma = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Dat het produkt rs niet standvastig is, evenals pq, ziet men terstond.

De polen R en S zijn evengoed „brandpunten" der kromme als P en Q.

Om dit in te zien, heeft men slechts de vergelijking in rechthoekige coördinaten,

$$(x^2 + y^2 + \tfrac{1}{4} f^2)^2 - f^2 x^2 = \tfrac{1}{16} f^4 \sin^2 2\sigma \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

te combineeren met de vergelijking der rechte, die het punt R, (coördinaten $x = \frac{1}{2} f \cos 2\sigma$, $y = 0$), verbindt met een der cirkelpunten in het oneindige; dus met

$$y = \pm (x - \tfrac{1}{2} f \cos 2\sigma) \sqrt{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Men vindt dan, na eenige herleiding,

$$(x - \tfrac{1}{4} f \cos 2\sigma)^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

waaruit blijkt, dat de bewuste rechte de kromme raakt.

Voor de *lemniskaat* wordt $a^2 = \frac{1}{4} f^2$, dus $g = \frac{1}{2} f$; de polen R en S vereenigen zich in het centrum der kromme, en de beide takken worden voorgesteld door de betrekkingen.

$$2r = \pm (p - q) \sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Plantenkunde. — De Heer RAUWENHOFF deelt den uitslag mede van onderzoekingen, door Dr. H. F. JONKMAN, te Utrecht, gedaan „*Over de embryogenie van Angiopteris en Marattia*", en biedt daarover een opstel aan voor het Zittingsverslag.

Sedert het verschijnen mijner verhandeling [1]) omtrent de geslachtsgeneratie van de Varengeslachten *Angiopteris* en *Marattia*, zijn enkele onderzoekingen betreffende de Marattiaceeën uitgegeven.

Zoo heeft GUIGNARD [2]) de ontwikkeling en den bouw der spermatozoïden van *Angiopteris evecta* Hoffm. beschreven.

KÜHN's [3]) doel was, om, behalve het doen van histologische onderzoekingen, een helder inzicht in het verloop en het ontstaan van

---

[1]) La génération sexuée des Marattiacées, par H. F. JONKMAN, in de Archives Néerlandaises. T. XV. p. 199.

[2]) Développement et constitution des anthérozoïdes, par LÉON GUIGNARD, in de Revue génerale de Botanique. T. I. p. 71.

[3]) Untersuchungen über die Anatomie der Marattiaceen und anderer Gefässkryptogamen, von R. KÜHN, in Flora. T. 72. p. 457.

het samengestelde vaatbundelstelsel, hetwelk men bij de Marattiaceeën aantreft, te verkrijgen, terwijl hij tevens wenschte vast te stellen, in hoeverre de verkregen uitkomsten voor de verwantschapsbetrekking met andere Varenfamilies konden gebruikt worden. GOEBEL had het daarvoor door hem in 1885 op Ceylon en Java verzameld materiaal van *Marattia fraxinea* Smith en *Kaulfussia aesculifolia* Blume, hetwelk hij zoowel in jonge als oudere ontwikkelingstoestanden bezat, ter beschikking van KÜHN gesteld. Ook ontving deze [1]) voor zijne onderzoekingen omtrent den anatomischen bouw van *Danaea* door tusschenkomst van URBAN en PETER materiaal van dit geslacht uit de herbariën van de Universiteiten, te Berlijn en te Göttingen, waardoor hij in staat werd gesteld de vroeger hieromtrent gedane mededeelingen te controleeren.

Gedurende zijn verblijf op Ceylon, nam FARMER [2]) de gelegenheid te baat, om zooveel mogelijk voorkiemen van *Angiopteris* te verzamelen, met de bedoeling om de ontwikkeling van het sporophyt te bestudeeren. Hoewel zijne uitkomsten onvolledig zijn, zoo is het hem toch mogelijk geweest belangrijke mededeelingen omtrent het embryo van *Angiopteris evecta* Hoffm. te doen.

CAMPBELL [3]) was, terwijl hij op de Hawaï-eilanden planten verzamelde, gelukkig genoeg, om een groot aantal zeer jonge planten van *Marattia Douglasii* Baker te vinden, benevens eenige voorkiemen met embryo's, waardoor het hem mogelijk was de voornaamste ontwikkelingstoestanden te bestudeeren. Zijn materiaal was evenwel te schaarsch, om eenig licht te werpen op de eerste verdeelingen van het embryo.

Voegt men hieraan toe, dat BREBNER [4]) over de gomkanalen der Marattiaceeën heeft geschreven, LUERSSEN [5]) enkele eencellige embryo's en een paar jonge plantjes van *Marratia cicutaefolia* Klf. heeft verkregen, maar de verdere ontwikkeling niet kon vervolgen, omdat zijne culturen te gronde gegaan waren, en schrijver [6]) zelf de eerste

---

[1]) Ueber den anatomischen Bau von *Danaea*, von R. KÜHN, in Flora. T. 73. p. 147.

[2]) On the Embryogeny of *Angiopteris evecta* Hoffm. by J. BRETLAND FARMER, in de Annals of Botany. Vol. VI. No. XXIII.

[3]) Observations on the Development of *Marattia Douglasii* Baker, by DOUGLAS HOUGHTON CAMPBELL, in de Annals of Botany. Vol. VIII. No. XXIX.

[4]) On the Mucilage-canals of the Marattiaceae, by G. BREBNER, in het Linnean Society's journal-Botany. Vol. XXX.

[5]) Handbuch der syst. Botanik, von CHR. LUERSSEN. I. Kryptogamen. p. 581.

[6]) Over de kieming van *Kaulfussia aesculifolia* Blume, door H. F. JONKMAN, in het Nederl. Kruidk. Archief. III.

kiemingsstadiën van *Kaulfussia aesculifolia* Blume heeft gegeven, dan is de literatuur omtrent de Marattiaceeën vrij zeker volledig vermeld.

Dat slechts weinige en meestal onvolledige mededeelingen konden worden gegeven, ligt aan de moeielijkheid ter verkrijging van het noodige en geschikte materiaal. Indien men niet zoo gelukkig is als de meeste der bovengenoemde schrijvers, om voorkiemen en jonge plantjes te verzamelen, — non cuivis contingit adire Corinthum, — dan is men wel genoodzaakt om door kiemingsproeven zich het verlangde te verschaffen. Daar men hiervoor zeer moeielijk het noodige *bruikbare* sporenmateriaal kan bekomen, en de kiemingsproeven, vooral met tropische gewassen, een bepaalde inrichting om deze te kunnen doen, vorderen, en bovendien zeer veel zorg vereischen en hoogst tijdroovend zijn, zoo worden deze òf niet ondernomen òf er komt wegens het gebrekkig materiaal, hetwelk men meestal ontvangt, van de culturen niets terecht. Dit was bijvoorbeeld het geval met de talrijke uitzaaiingen van *Angiopteris evecta* Hoffm. en *Angiopteris pruinosa* Kunze, welke Voegler [1]), zonder gunstig gevolg, in 't werk heeft gesteld.

Nadat mijne vroegere culturen te gronde waren gegaan, toen ik deze zelf niet meer kon verzorgen, omdat andere werkzaamheden mijn tijd in beslag namen, heb ik later meermalen nieuwe uitzaaiingen van Varensporen gedaan, waaronder van *Angiopteris* en *Marattia*, om te trachten de reeds in mijn bezit zijnde gegevens omtrent de embryogenie van beide geslachten met hetgeen mij nog ontbrak aan te vullen.

De wijze, waarop de culturen ingericht waren, heb ik indertijd [2]) uitvoerig beschreven. De veranderingen er in aangebracht, zullen worden medegedeeld in het Maandblad voor Natuurwetenschappen te Amsterdam, tegelijk met de beschrijving en afbeelding van een kiemkasje, dat ik voor mijne onderzoekingen heb ingericht. Was het mij vroeger slechts met de grootste zorg mogelijk de culturen rein te houden en tegen afsterven te bewaren, thans staat alles even frisch en doen mijne uitzaaiingen van *Gleichenia*-sporen, welke Treub zoo vriendelijk was voor mij uit de Kew Gardens mede te nemen, dan ook een rijken oogst van jonge plantjes verwachten, zoodat de

---

[1]) Beiträge zur Kenntniss der Reizerscheinungen, von Carl Voegler, in de Botanische Zeitung. Jahrg. 49. p. 641.

[2]) De geslachtsgeneratie der Marattiaceeën, door H. F. Jonkman. p. 21 tot 29.

hoop bestaat ook van deze Varenfamilie de embryogenie te kunnen geven [1]).

Na deze opmerking over de cultuur gemaakt te hebben, ga ik over tot mijn onderwerp. Het leven van het gametophyt of de geslachtsgeneratie van een Varen begint met de kieming der spoor [2]) en eindigt met de vorming van de spermatozoïden binnen het antheridium en van de eicel binnen het archegonium. Op welke wijze de antheridiën en archegoniën zich ontwikkelen en hoe zij samengesteld zijn, is volledig aangegeven in mijn vroeger reeds aangehaalde verhandeling [3]).

Wat betreft de spermatozoïden, zoo bestaat er geen verschil tusschen die van *Angiopteris* en van *Marattia*, of liever dit verschil is niet aan te toonen. De ontwikkeling en bouw van de spermatozoïden van *Angiopteris evecta* Hoffm. zijn uitvoerig nagegaan door Guignard [4]). Het volwassen spermatozoïd is spiraalvormig en bestaat uit twee of twee en een halve winding, waarvan de laatste wijder is dan de eerste. Het voorste gedeelte van het spermatozoïd is betrekkelijk smal en voorzien van ciliën. Men vindt steeds een zekere hoeveelheid zetmeelhoudend protoplasma binnen de laatste spiraalwinding, hetwelk het spermatozoïd in den vorm van een blaasje een tijd lang met zich sleept.

Indien men een spermatozoïd doodt op het oogenblik, waarop het zijn beweging vertraagt, wanneer alle ciliën geïsoleerd zijn, dan ziet men, dat geen dezer op de laatste spiraalwinding voorkomt, en wanneer men er in slaagt de spermatozoïden met teruggeslagen ciliën waar te nemen, dan merkt men op, dat deze slechts op de eerste helft van de voorste spiraalwinding zijn ingeplant. Fixeert men een spermatozoïd plotseling, gedurende de snelste rotatie, dan

---

[1]) Rauwenhoff, die de geslachtsgeneratie der Gleicheniaceeën heeft beschreven in de Natuurk. Verh. der Koninkl. Academie, D. XXVIII, heeft zijn verdere onderzoekingen, uit gebrek aan voldoend materiaal, niet kunnen voorzetten.

[2]) Bij het onderzoek van de rijpe sporen vóór en bij het begin der kieming is mij gebleken, wat betreft de Varengeslachten *Angiopteris*, *Marattia*, *Osmunda* en *Gleichenia*, — want omtrent andere Varengeslachten zijn mijne onderzoekingen nog niet afgesloten, — dat de intine (endosporium) dezer sporen niet kiemt, maar dat om den protoplast een nieuwe wand wordt gevormd welke als kiembuis te voorschijn komt, zooals reeds voor *Gleichenia* is aangegeven door Rauwenhoff (Versl. en Med. der Kon. Akad. v. Wet. Afd. Natuurk. 2e Reeks D. XIV). In de laatste jaarvergadering van de Nederl. Botan. Vereeniging heb ik hierover een voorloopige mededeeling gedaan.

[3]) l. c. p. 42 tot 47, met de daarbij behoorende figuren.

[4]) l. c. p. 71, met de daarbij behoorende figuren.

vindt men de eiliën, voor het grootste gedeelte, in de richting van de spiraal geplaatst.

Evenmin als op de ontwikkeling der antheridiën, zal ik hier ingaan op die der archegoniën, daar ik deze reeds vroeger[1]) uitvoerig beschreven heb. Slechts zij de bouw van het volwassen archegonium vermeld.

Het getal der halscellen bedraagt in twee der halsrijen meest vier, in de twee andere meest drie, waarvan hoogstens slechts de twee bovenste buiten de oppervlakte van de voorkiem of het prothallium uitsteken. Slechts zelden klimt dit getal tot vier en vijf; soms daalt het tot twee en drie; ook kan het getal in alle vier rijen gelijk zijn.

Spoedig nadat het archegonium zijn volkomen grootte bereikt heeft, vertoonen de kanaalcellen, boven de eicel gelegen, zich met een slijmige zelfstandigheid gevuld, terwijl de wanden dezer cellen opgelost worden.

Komen nu de rijpe archegoniën met water in aanraking, dan zwelt de inhoud van het kanaal sterk op, hetgeen een spanning veroorzaakt tegen de bovenste halscellen, waaraan deze eindelijk niet meer in staat zijn weerstand te bieden; zij laten elkaar los, waardoor het archegonium geopend wordt en het slijm met kracht naar buiten wordt gedreven, waar het voor den mond van het archegonium blijft liggen. Gewoonlijk komt er meer dan eens kort na elkaar een hoeveelheid slijm te voorschijn. Bij de uitstooting van het slijm helpen de mantelcellen mede.

Na de opening der archegoniën wijken de bovenste halscellen steeds meer uiteen, waardoor de hals van het archegonium een trechtervormige gedaante verkrijgt. De toegang tot de eicel is dus voor de spermatozoïden vrij.

De eicel zelve bezit in 't midden een kern, aan de naar het halskanaal toegekeerde zijde een doorschijnende plek, de bevruchtingsvlek, en een fijn korreligen inhoud met zetmeelkorreltjes; zij wacht op de bevruchting. Hoe geschiedt deze?

Al spoedig leert de waarneming, welke antheridiën op het punt staan zich te openen, welke niet. Men kan dit opengaan bevorderen, wanneer men het substraat, waarop zich de voorkiemen met bijna rijpe antheridiën bevinden, gedurende eenige dagen niet bevochtigt, en eerst daarna de voorkiemen in een druppel water brengt. De dekselcel springt dan spoedig open; door de opzwellende mantel-

---

[1]) l. c. p. 47 tot 51, met de daarbij behoorende figuren.

cellen worden de moedercellen, waarbinnen zich de volwassen spermatozoïden bevinden, naar buiten geperst. De wand van de moedercel berst, waardoor het spermatozoïd vrij komt en de ciliën haar werkzaamheid beginnen. Het spermatozoïd draait zich gedurende zijne zwermende beweging om zijn as. De beweging kan soms wel een half uur en langer duren; zij is kort na het verlaten der antheridiën het snelst, maar wordt steeds langzamer, om eindelijk geheel op te houden.

Tegen het vermoeden van PFEFFER [1]), dat het door de spermatozoïden medegevoerde blaasje aan het spermatozoïd gedurende zijn langdurige rotatie voedsel zou toevoeren, wordt door VOEGLER [2]) terecht opgemerkt, dat de spermatozoïden ook na het loslaten van het blaasje in staat zijn hunne bewegingen bijna even lang als met het blaasje voort te zetten.

PFEFFER heeft in zijne „locomotorischen Richtungsbewegungen" het eerst aangetoond, dat bij de door hem onderzochte Varens door een in het omringende water diffundeerende stof, appelzuur, de richting van de beweging der spermatozoïden naar het archegonium wordt bepaald. Deze stof wordt door het archegonium afgescheiden. Tengevolge hiervan dringen de spermatozoïden in de nauwe opening van het archegonium binnen en bereiken zoo de eicel. VOEGLER heeft dit onderzoek tot meerdere Varensoorten uitgebreid. Voor zoover nu de spermatozoïden der Varens onderzocht zijn geworden, komt hun ten naastenbij een gelijke graad van gevoeligheid voor appelzuur toe. Het zijn dikwijls uiterst geringe hoeveelheden, welke een krachtige beweging te voorschijn roepen. Zoo is reeds eene 0,001 pCt. oplossing van appelzuur voldoende, om de in zuiver water doelloos rondzwermende spermatozoïden van Varens te lokken. Analoog aan het vrije appelzuur werken de neutrale zouten in verdunde oplossingen.

Hoewel VOEGLER niet in de gelegenheid was deze werking ook bij de spermatozoïden der Marattiaceeën te onderzoeken, daar zijne talrijke uitzaaiïngen van *Angiopteris evecta* Hoffm. en *Angiopteris pruinosa* Kunze geen gunstig gevolg hadden, zoo is het toch hoogst waarschijnlijk, dat ook bij deze Varenfamilie hetzelfde lokmiddel gevonden zal worden, daar alle tot heden onderzochte Varens, afkomstig uit de families der Cyatheaceeën, Schizaeaceeën, Parkeriaceeën, Polypodiaceeën en Osmundaceeën hierin overeenstemmen.

---

[1]) Untersuchungen a. d. bot. Institut Tübingen. I.

[2]) l. c. p. 648.

Op volkomen dezelfde wijze nu als de spermatozoïden der Varens bij de proefnemingen van PFEFFER en VOEGLER op het in capillaire buisjes vervatte appelzuur reageerden, worden zij door het uit de archegoniën uitgestooten slijm aangetrokken. Zoodra zij onder den invloed van de stof komen, welke zich van uit het archegonium door het omgevende water verspreidt, nemen zij hun richting naar het voor den hals liggende slijm en boren zich hierin, met het spitse uiteinde voorwaarts gericht. Bij het binnendringen in het halskanaal van het archegonium, worden de spiraalwindingen van het spermatozoïd uitgerekt en beweegt het spermatozoïd zich langzaam met het voorste uiteinde naar de eicel toe. Wanneer het niet reeds vroeger het aanklevend blaasje verloren heeft, wordt het in elk geval daarvan in den mond van het archegonium bevrijd.

Zoodra het spermatozoïd in de nabijheid der eicel gekomen is, trekt het zijne spiralen samen en begint zich weder levendiger te bewegen. Na een korten tijd tracht het spermatozoïd in de eicel binnen te dringen.

Daar de archegoniën van *Angiopteris* en *Marattia* zich meest aan de onderzijde en steeds in het sterk verdikte middengedeelte of halvebolvormig uitspringende weefselkussen ontwikkelen en de eicel diep verborgen in een sterk chlorophylhoudend weefsel gelegen is, zoo was het niet voldoende de van archegoniën voorziene voorkiemen op een voorwerpglaasje te brengen en spermatozoïden te laten toetreden, om de bevruchting te kunnen waarnemen. Op deze wijze kon men wel het binnendringen der spermatozoïden in het halskanaal zien, maar verder niets. Er moest dus naar een middel gezocht worden, om toch den loop der spermatozoïden binnen het archegonium te kunnen vervolgen. Daartoe werd van het halvebolvormig uitspringde weefselkussen, waarin de talrijke archegoniën weggedoken zijn, een stuk afgesneden, en dit zorgvuldig met water afgespoeld, opdat er geen stoornis kon ontstaan in de werking der spermatozoïden ten gevolge van het bij de verwonding uit de aangesneden cellen naar buiten getreden celsap. Was dit stuk echter te dik genomen, dan leverde het geen resultaat op; want dan kon men nog niets zien. Was het dun genoeg, dan waren er blijkbaar, ten gevolge van deze amputatie, zoodanige wijzigingen in den vorm van het halskanaal ontstaan, dat de spermatozoïden vruchteloos trachten binnen te dringen.

Toen deze wijze van handelen geen resultaat opleverde, werden dwarse doorsneden van de voorkiem gemaakt. Nadat deze waren afgespoeld en de archegoniën waren opengegaan, werd een druppel

water, waarin te voren voorkiemen met antheridiën gelegd waren, welke daarin hunne spermatozoïden hadden ontlast, toegevoegd. Op deze wijze is het mij een paar malen gelukt een spermatozoïd tot in de eicel te zien binnendringen. Het spermatozoïd boort zich door de hyaline vlek, de bevruchtingsvlek, in de eicel. Wat er verder met het spermatozoïd gebeurt, is mij, ondanks mijne herhaalde pogingen, onbekend gebleven. Maar CAMPBELL is bij zijn op de Hawaï-eilanden verzameld materiaal zoo gelukkig geweest voorkiemen te vinden, welke de verdere ontwikkelingstoestanden van het spermatozoïd binnen de eicel bezaten.

Het getal archegoniën, waarbij bevruchting plaats heeft en het tot ontwikkeling van een jonge plant komt, is steeds uiterst gering. Om dat getal te vermeerderen en dus zooveel mogelijk embryo's te verkrijgen, werden tal van voorkiemen, rijk van archegoniën voorzien, van de potjes genomen en op een voorwerpglaasje op de rugzijde gelegd; daarna werd een druppel water met spermatozoïden toegevoegd. Na eenige minuten werden de voorkiemen weer op hare vroegere plaats teruggebracht. Aldus heb ik mij het noodige materiaal verschaft, om de eerste ontwikkelingstoestanden van het embryo te kunnen bestudeeren.

Nadat het spermatozoïd door de bevruchtingsvlek in de eicel is binnengedrongen, ondergaat het aanvankelijk geen verandering. Tweemaal werd door CAMPBELL een spermatozoïd, geheel onveranderd, binnen de pas bevruchte eicel waargenomen. In beide gevallen was het spitse, voorste uiteinde van het spermatozoïd in rechtstreeksche aanraking met de membraan van de eikern. In een verderen ontwikkelingstoestand waren de twee kernen, de spermakern en de eikern, in elkaars onmiddellijke nabijheid; de eikern scheen gecontraheerd; of dit de normale, aan de samensmelting der kernen voorafgaande toestand is, kon uit gebrek aan materiaal niet uitgemaakt worden. In een nog ouder ontwikkelingsstadium, waarbij de wand van de bevruchte eicel zeer duidelijk aanwezig was en waartegen verscheidene spermatozoïden lagen, vertoonde de kern twee kernlichaampjes en nog een duidelijke scheiding tusschen de twee parende kernen.

Na de bevruchting omgeeft zich de nieuwe protoplast met een cellulose-wand en vormt een nieuw individu, het embryo of de kiem, welke, zonder voorafgaanden rusttoestand, tot het sporophyt of de geslachtelooze generatie uitgroeit, een in uitwendige gedaante en inwendigen bouw hoog gedifferentieerde plant met wortels, stam en bladeren.

Terwijl de bevruchte eicel, het embryo, belangrijk in omvang toeneemt, beginnen ook de haar omringende cellen krachtig te groeien en zich te vermeerderen. Het bovenste gedeelte van het halskanaal verschrompelt en wordt bruin, en ten gevolge van de ontwikkeling der naburige cellen wordt het benedenste gedeelte van het halskanaal zoo goed als gesloten. De verdere vorming van het embryo heeft dus binnen de voorkiem plaats.

Zoowel bij *Angiopteris* als bij *Marattia* heeft de eerste verdeeling van het embryo op eene van de overige Varens afwijkende wijze plaats. De basaal-wand, welke het embryo in twee ongeveer gelijke cellen verdeelt, staat ongeveer loodrecht op de lengte-as van het archegonium en is dus evenwijdig aan de oppervlakte der voorkiem, terwijl, zooals bekend is, deze eerste wand bij de leptosporangiate Varens loodrecht staat op de oppervlakte van de voorkiem en ongeveer evenwijdig is aan de lengte-as van het archegonium. Ten gevolge van deze veranderde ligging van den basaal-wand verschillen de Marattiaceeën van al de bekende Varens, wat betreft de plaatsing der uit het embryo ontstane organen, zooals nader zal blijken. Door den eersten wand wordt het embryo in een epibasale en in een hypobasale helft verdeeld. De laatste is naar den thans zoo goed als gesloten hals van het archegonium gekeerd, terwijl de eerste naar de voorkiem gericht is. Vervolgens verdeelt elk dezer helften zich weder door een mediaan-wand, welke loodrecht op den basaal-wand staat en evenwijdig is aan de lengte-as van de voorkiem, in twee cellen, ten gevolge waarvan het embryo nu uit vier cellen, kogelquadranten, bestaat. Onmiddellijk hierna, soms hieraan voorafgaande, ontstaat in elk quadrant door een op de beide vorige deelingen en op de voorkiem loodrecht geplaatsten transversaal-wand weder twee cellen, zoodat het embryo thans uit acht cellen, octanten, opgebouwd is. In deze octanten hebben de verdeelingen in den beginne in alle ongeveer gelijktijdig plaats; maar al spoedig treden er verschillen op en geschieden de verdeelingen niet met die gemakkelijk te volgen regelmaat, welke men bij de tot heden onderzochte Varens heeft opgemerkt. Deze schijnbare onregelmatigheid is een gevolg van de afwezigheid van topcellen, waarvan bij de overige Varens de verdere ontwikkeling uitgaat.

De basaal-wand bepaalt de ligging van de organen in het embryo; uit de epibasale helft ontstaan de cotyledo of het kiemblad en de stam, terwijl de hypobasale helft het aanzijn geeft aan den wortel en den voet. Maar de ligging van deze organen in het archegonium verschilt bij *Angiopteris* en *Marattia* van die bij de leptosporangiate Varens. Bij deze laatsten ontstaat de cotyledo uit dat deel van de

epibasale helft van het embryo, dat aan den hals van het archegonium grenst, terwijl bij *Angiopteris* en *Marattia* de cotyledo wel zijn oorsprong neemt uit een gedeelte van de epibasale helft, maar deze laatste, en dus ook de cotyledo, is naar de voorkiem gekeerd. De cotyledo komt dan ook niet, zooals bij de andere Varens aan de benedenzijde van de voorkiem te voorschijn, maar groeit door de voorkiem heen, om uit de bovenzijde voor den dag te komen. Met deze veranderde ligging van den cotyledo gaat natuurlijk ook een gewijzigde plaatsing der andere organen van het embryo gepaard.

De cotyledo ontstaat meer bepaaldelijk uit de twee voorste octanten van de epibasale helft, terwijl de stam zijn oorsprong neemt uit de twee achterste octanten van dezelfde helft. Beneden den cotyledo wordt uit de twee voorste octanten der hypobasale helft de wortel gevormd, terwijl beneden den stam uit de twee achterste octanten dier helft de voet zich ontwikkelt. Oorspronkelijk bolvormig, neemt het embryo in verderen ontwikkelingstoestand een eivormige gedaante aan, behoudt deze gedurende eenigen tijd en differentieert zich betrekkelijk laat, later althans dan meestal bij andere Varens het geval is.

Door tusschenkomst van den v o e t, welke benaming van HOFMEISTER afkomstig is, maar die nu juist niet de beteekenis van dit orgaan weergeeft, blijft het embryo met den in den beginne mede uitgroeienden, wijder wordenden buik van het archegonium in verbinding en door deze met het overige gedeelte van de voorkiem. De voet ontwikkelt zich verder, doordat in de octanten, waaruit hij ontstaat, meest loodrecht op elkaar staande deelingen plaats hebben, welke niets bijzonders vertoonen. Dit orgaan heeft de bestemming, om gedurende den eersten tijd aan het jonge embryo de noodige voedingsstoffen uit de voorkiem te verschaffen. Het is dus een zuigorgaan, dat als voedingsorgaan dienst doet, totdat de wortel der kiemplant in den bodem is binnengedrongen en de eerste blaadjes zich uitgespreid hebben, waardoor dan de jonge plant in staat is zich zelfstandig te voeden. Zoodra dit het geval is, gaat de voorkiem gewoonlijk spoedig te gronde. Maar bij *Angiopteris* en *Marattia* blijft deze nog lang daarna bestaan.

De w o r t e l ontstaat uit de beide voorste octanten van de hypobasale helft, hoewel eene der twee in den aanvang zich spoediger vermeerdert dan de andere. Het is mij nooit gelukt, om, evenals bij andere Varens, één topcel te vinden, waarvan de verdere groei van den wortel zou uitgaan ; steeds vertoonde zich, voor zoover ik dit heb kunnen nagaan, een viertal cellen, waaruit de wortel zich verder ontwikkelt ; men zou hier dus te doen hebben met een wijze

van groei, welke tusschen dien der leptosporangiate Varens met één topcel en dien der Phanerogamen met een meristeem in staat, hetgeen weder zeer kenmerkend voor de Marattiaceeën zou zijn, welke toch reeds in zoovele opzichten van de overige Varens verschillen.

Ook bij den groei van den cotyledo werd geen topcel opgemerkt; maar de ontwikkeling geschiedt, doordat in het jongste gedeelte van den cotyledo herhaaldelijk tangentiale en radiale deelingen plaats grijpen. In den beginne groeit de cotyledo in verticale richting, dus naar de bovenzijde van de voorkiem toe; maar na eenigen tijd heeft de groei aan zijn buitenkant sterker plaats dan aan de binnenzijde, waardoor de cotyledo zich ombuigt.

De stam ontstaat uit de beide achterste octanten van de epibasale helft, al schijnt één der twee al spoedig niet meer zoo krachtig aan den verderen groei deel te nemen; hij ontwikkelt zich bij *Angiopteris* en *Marattia* al evenmin uit één topcel, maar wordt door een kleincellig meristeem voortgebracht, zoodat de Maratiaceeën, wat betreft den bouw van den top des stams mede een verbindingslid tusschen de overige Varens en de Phaneroganen vormen.

Wanneer de cotyledo zich begint te krommen, ziet men in de as van het embryo de eerste ontwikkeling van een vaatbundel, welke uit smalle, dunwandige cellen bestaat; deze vertoont zich 't eerst ongeveer in het midden van het embryo, in den cotyledo, maar daarna ook in stam en wortel. Op dezelfde plaats worden ook de eerste tracheïden gevormd. Eveneens vindt men reeds looizuurhoudende cellen, vóór het embryo uit de voorkiem te voorschijn komt. Bovendien kan men reeds aan een gedeelte van de buitenvlakte van het embryo een duidelijke opperhuid onderscheiden, terwijl zich tusschen deze en de centraal gelegen streng van smalle cellen wijdere cellen bevinden.

Kort nadat deze differentieering in het embryo heeft plaats gehad, komt de eerste wortel uit de benedenzijde van de voorkiem te voorschijn, terwijl de cotyledo meestal gelijktijdig door de bovenzijde heenbreekt. Soms zelfs komt deze laatste het eerst voor den dag. Door deze wijze van naar buiten treden van den cotyledo onderscheiden zich *Angiopteris* en *Marattia* van de andere Varens, wier embryogenie bekend is; want bij deze laatsten verschijnt de cotyledo en ook de stam uit de benedenzijde. Voordat het doorbreken van wortel en cotyledo geschiedt, bemerkt men reeds aan de boven- en benedenzijde van de voorkiem een bolvormige verhevenheid.

Zooals reeds is opgemerkt, staat dit ontspringen van cotyledo en stam uit de bovenzijde van de voorkiem in verband met de ligging van den eersten, den basaal-wand, in het archegonium, welke wand

niet, zooals bij de Varens, ongeveer evenwijdig is aan de lengte-as van het archegonium en loodrecht op de oppervlakte van de voorkiem gevormd wordt, maar loodrecht staat op de lengte-as van het archegonium en evenwijdig is aan de oppervlakte van de voorkiem.

Nieuwe bladeren en wortels ontwikkelen zich spoedig aan het jonge plantje. Het tweede blad verschijnt bijna tegenovergesteld aan het eerste, terwijl het derde blad vlak naast den cotyledo ontstaat. Elk nieuw blad is samengestelder van bouw dan het vorige, hoewel soms twee opvolgende bladeren in bouw aan elkaar gelijk zijn. Het komt echter ook voor, dat eenige bladeren gevormd worden, welke niet of slechts weinig in bouw van het eerste blad verschillen. Dit laatste is evenwel een abnormaal verschijnsel. De twee eerste bladeren bezitten geen steunblaadjes; maar deze zijn reeds goed ontwikkeld bij het derde blad, waarvan zij den voet insluiten. De bladstelen, bladeren en stam zijn bedekt met kleine haren, welke een groote hoeveelheid looizuur bevatten.

In den beginne wordt er een wortel aan de basis van elk jong blad gevormd; maar dit geschiedt niet altijd. Bij oudere planten zijn de wortels evenwel meestal talrijker aanwezig dan de bladeren.

De cotyledo van *Angiopteris* verschilt in vorm en nervatuur van dien van *Marattia*. Het eerste blad van *Angiopteris* is min of meer spatelvormig en bezit een hoofdnerf, terwijl dat van *Marattia* een weinig gelobd is en de nerven zich in den voet van het blad vertakken. Evenwel heb ik bij *Marattia fraxinea* Sm. afwijkingen in vorm en nervatuur bij het eerste blad aangetroffen. Deze afwijkingen zal men vinden onder de teekeningen, welke elders zullen verschijnen.

Na afloop van mijn onderzoekingen omtrent de anatomie van deze planten, welke nog niet zijn afgesloten, zal ik hare verwantschapsbetrekking met andere plantengroepen bespreken. Zooveel schijnt reeds zeker, dat zij in menig opzicht nader bij de Levermossen, en met name bij de orde der Anthoceroteeën staan dan met de overige Pteridophyten het geval is, terwijl uit het medegedeelde ook blijkt, dat zij merkwaardige punten van overeenkomst met de Phanerogamen vertoonen.

Physiologie. — De Heer Engelmann biedt voor de verhandelingen een manuscript aan van Dr. H. J. Hamburger te Utrecht: „*Over den invloed der intraintestinale drukking op de resorbtie in den dunnen darm*". De Voorzitter stelt het stuk in handen van de Heeren Engelmann en Place, die zich bereid verklaren daarover verslag uit te brengen in de Maart-vergadering.

Scheikunde. — De Heer MULDER biedt voor de verhandelingen aan het door hemzelven en den Heer J. HERINGA bewerkte 2e deel van „*Onderzoekingen over een peroxysalpeterzuur zilver*".

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES overhandigt eene nota van verbeteringen, betrekking hebbende op zijne mededeelingen in het Zittingsverslag van 25 Januari 1896.

Pag. 238 reg. 9 v. b. in plaats van Maar te lezen M. a. w.; pag. 238 Noot 1 reg. 4 v. o. voor thermodynamische te lezen gereduceerde; pag. 238 Noot 1 reg. 3 v. o. in plaats van is te lezen vindt RIECKE; pag. 238 Noot 1 reg. 2 v. o. toe te voegen om de gereduceerde thermodynamische potentiaal te berekenen moet de energie van uit den kritischen toestand gerekend worden en de zoo verkregen thermodynamische potentiaal gedeeld worden door de kritische temperatuur; pag. 239 reg. 4 v. o. achter thermodynamisch te lezen al of niet; pag. 242 reg. 13 v. b. voor af laat blazen te lezen door een regenerator; pag. 243 reg. 17 v. b. in plaats van kon te lezen kan; pag. 244 reg. 4 v. o. te lezen op de juiste kennis van de veranderlijkheid van het moleculair arbeidsvermogen met de gereduceerde temperatuur; pag. 245 reg. 7 v. b. voor tevreden te lezen uit een theoretisch oogpunt; pag. 245 reg. 9 v. b. voor veranderlijkheid te lezen wet van; pag. 245 reg. 11 v. b. achter maken toe te voegen dat de specifieke warmte onder verschillenden druk verschillen en dit verschil met dalende temperatuur toeneemt of m. a. w.; pag. 245 reg. 12 v. b. in plaats van hooger te lezen lageren; pag. 245 reg. 21 v. b. toe te voegen: tot welke afkoeling met behulp van een tweede regeneratorspiraal alleen dat gas beschikbaar is dat uit den toestel, waarin de vloeibare zuurstof wordt afgetapt (b.v. een zuurstofkookglas als het l.c. § 8 beschrevene), terug wordt geleid en dat dus nog weder verder ontspannen is en dus het te kort in den regenerator verder zal doen toenemen. De toename van de moleculaire potentieele energie met afnemende temperatuur, die in een opzicht bevorderlijk is voor het welslagen van LINDE's methode, doordat zij het THOMSON-JOULE-effect doet toenemen, moet noodzakelijk in een ander opzicht schadelijk zijn aan het leveren van vloeistof, doordat zij de onvolkomenheid van het regeneratorproces bij lagere temperatuur doet toenemen; pag. 245 reg. 12 v. o. in plaats van nog verdere ontspanning te lezen ontspanning tot het gas de atmosferische druk heeft, gelijk dit toegepast wordt in LINDE's zuurstoftoestel; pag. 245 reg. 14 v. o. inplaats van nog weder ongunstiger, te lezen: zeer ongunstig; pag. 245 reg. 14 v. o.

toe te voegen: Wanneer men op deze minder voordeelige wijze begint te werken met denzelfden verdichtingstoestel, dien wij te voren beschouwden en men slechts over hetzelfde arbeidsvermogen per eenheid van tijd kan beschikken, zal men veel langer moeten wachten voor men vloeistof verkrijgt. Er moet dus ook meer zorg aan besteed worden om warmte toevoer naar den toestel te voorkomen. pag. 245 reg. 12 v. o. achter door te lezen van het begin af; pag. 245 reg. 11 v. o. achter gas te lezen van veel hooger drukking dan LINDE gebruikt van het begin af; pag. 245 reg. 10 v. o. achter LINDE te lezen in zijn zuurstoftoestel; pag. 245 reg. 6 v. o. toe te voegen: Tot dit doel is de waterwaarde van zijn toestel in verhouding tot de waterwaarde van het gas, dat er in de eenheid van tijd doorgaat, veel kleiner; pag. 246 reg. 19 v. b. lees het wegstroomende gas geheel in plaats van al het wegstroomend gas; pag. 246 reg. 21 v. o. voor zuurstof te lezen met behulp van zijn waterstofspray; pag. 247 reg. 5 v. o. na ook te lezen bij mijn kookglas; pag. 248 reg. 15 v. b. te lezen convectie in plaats van confectie.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt voor het *Zittingsverslag* een opstel aan getiteld: „*Over de eenvoudigste ruimtekrommen op het oppervlak van* STEINER".

1. In 1867 is CREMONA [1]) tot het besluit gekomen, dat op het oppervlak S^4 van STEINER geen ruimtekrommen van oneven graad gelegen zijn. In 1869 heeft STURM tevens gevonden, dat er ook

---

1) Ten onrechte meende ik in mijn vorige mededeeling de litteratuur van het onderwerp volledig aangegeven te hebben. Aan de genoemde verhandelingen is nl. nog toe te voegen:

A. CLEBSCH, „Ueber die STEINER'sche Fläche", *Journal f. d. reine und angewandte Math.*, deel 67, blz. 1;

L. CREMONA, „Rappresentazione della superficie di STEINER et delle superficie gobbe di terzo grado sopra un piano", *Rendiconti* del R. Ist. Lomb., deel 4, blz. 15;

R. STURM, „Ueber die römische Fläche von STEINER", *Math. Ann.*, deel 3, blz. 76.

De eenwaardige afbeelding van S^4 op het platte vlak vormt de hoofdinhoud van de eerste en tweede verhandeling. Aan de stelkundige handelwijs van CLEBSCH beantwoordt ten naastebij onze parameterstelling op blz. 225, n°. 4. In de meetkundige behandeling van CREMONA komen met de vier raakcirkels der bijzondere raakvlakken van S^4 de vier zijden eener volledige vierzij overeen. Bij ons regelmatig oppervlak S^4 verkrijgt men deze afdeelding door op de verbindingslijn OP van een willekeurig punt P van S^4 met O de transformatie $xx' = yy' = zz'$ toe te passen en met P nu het snijpunt der nieuwe rechte met een willekeurig vlak, bijv. $x + y + z = k$, te laten overeenkomen. Verder houdt CREMONA zich bezig met twee bijzondere oppervlakken van STEINER, waarvan bij het eerste, hem door CLEBSCH aangewezene, twee, bij het tweede de drie dubbellijnen samenvallen. En in de veel langere verhandeling van STURM vindt men de voortbrenging van S^4 naar de raakvlakken, de beide bijzondere oppervlakken en de krommen op S^4 gelegen.

geen ruimtekrommen R^4 van de eerste soort zonder dubbelpunt op liggen. Deze belangrijke uitkomsten, die we, wat de krommen R^3 en R^4 aangaat, onafhankelijk van CREMONA en STURM verkregen hebben, mogen hier met eenige nieuwe beschouwingen aan de voorgaande mededeeling worden aangesloten We gaan hiertoe voornamelijk over, wijl het bewijs van CREMONA hoe scherpzinnig ook toch kunstmatig en dat van STURM met betrekking tot de krommen van oneven graad niet streng is.

2. Uit de vergelijking $y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 = 2kxyz$ van S^4 volgt onmiddellijk, dat de beide raakvlakken in het punt $(x_1, 0, 0)$ door de vergelijking $x_1 y^2 - 2kyz + x_1 z^2 = 0$ bepaald worden. Bij verplaatsing van het aangenomen punt P langs de X as vormen deze vlakken π_1 en π_2 dus een involutie, waarin elk vlakkenpaar een tweevlakkenhoek vormt met de beide vlakken $y \pm z = 0$ tot gemeenschappelijke deelvlakken. In verband met de bekende eigenschappen van de involutie der toegevoegde middellijnen eener gelijkzijdige hyperbool wordt deze involutie een gelijkzijdig hyperbolische vlakkeninvolutie genoemd. De gemeenschappelijke deelvlakken, die tevens de dubbelvlakken der involutie zijn, behooren bij de punten $x = \pm k$, die op de as het gebied der punten met bestaanbare raakvlakkenparen insluiten. En voor $x = 0$ vallen de beide raakvlakken met de coördinaatvlakken XY en XZ samen.

3. Met betrekking tot elk punt P gemeen aan een op S^4 gelegen ruimtekromme en een der coördinaatvlakken, de raaklijn p aan den door dit punt gaanden tak en het kromtevlak π van de kromme in dit punt aan dien tak leiden we uit het voorgaande de volgende besluiten af:

a. Elk niet met den oorsprong samenvallend punt P ligt op een der assen.

b. In het algemeen is de raaklijn p een willekeurige lijn door P in een der beide raakvlakken π_1 en π_2 in P aan S^4 aangebracht en dus niet in een der coördinaatvlakken gelegen; P telt dan voor een enkel snijpunt van de kromme met elk dier beide vlakken. In het bijzondere geval, dat de raaklijn P met de as samenvalt, valt het kromtevlak π met een der beide raakvlakken samen; P telt dan voor twee snijpunten van de kromme met elk der beide coördinaatvlakken door de as. En in het nog meer bijzondere geval, dat de as in P drie of meer opvolgende punten met den beschouwden tak gemeen heeft, zal P steeds voor hetzelfde aantal snijpunten van den tak met elk der beide coördinaatvlakken tellen.

c. De raaklijn aan een door den oorsprong gaanden tak ligt in het algemeen in een der drie vlakken, die den kromtekegel van het

drievoudig punt vormen — d. i. in een der drie coördinaatvlakken — zonder met een der beide in dit vlak gelegen assen samen te vallen. Het punt telt dan voor twee snijpunten met het vlak, dat de raaklijn bevat, en voor één snijpunt met elk der beide overigen. In het bijzondere geval, dat de raaklijn met een der assen samenvalt, valt het kromtevlak met een der coördinaatvlakken door deze as samen. Het punt geldt dan voor drie snijpunten met het laatste vlak, voor twee snijpunten met het andere vlak door de as en voor één snijpunt met het derde der coördinaatvlakken. In het meer bijzondere geval, dat de as m achtereenvolgende punten met den tak der kromme gemeen heeft, komen voor 3, 2, 1 de getallen $m+1$, m, 1 in de plaats.

d. Is P een dubbelpunt, dan geldt voor elk der door dit punt gaande takken afzonderlijk, wat boven is opgemerkt.

4. Heeft een op S^4 gelegen ruimtekromme R^n

p_1, p_2, p_3 takken door O, die achtereenvolgens de coördinaatvlakken buiten de assen raken,

q_1, q_2, q_3 takken door O, die achtereenvolgens de coördinaatassen raken en

r_1, r_2, r_3 buiten O op de assen gelegen punten,

dan zal de kegel van den graad $n - \Sigma p - \Sigma q$, die R^n uit O projecteert, S^4 snijden volgens een ruimtekromme van den graad $4(n - \Sigma p - \Sigma q)$ met een $3(n - \Sigma p - \Sigma q)$-voudig punt in O, die, wijl S^4 door elke van de assen verschillende rechte door O nog slechts in één punt gesneden wordt, uit niets meer dan de ruimtekromme R^n en de achtereenvolgens $2(q_1 + r_1)$-, $2(q_2 + r_2)$-, $2(q_3 + r_3)$-maal tellende coördinaatassen bestaan kan. Door opsomming van de graden der deelen van de doorsnee vinden we dus

$$4(n - \Sigma p - \Sigma q) = n + 2(\Sigma q + \Sigma r),$$

waaruit blijkt, dat n even moet zijn. Deze vergelijking treedt in den vorm

$$3(n - \Sigma p - \Sigma q) = \Sigma p + \Sigma q + 2(\Sigma q + \Sigma r)$$

op, als we de door het punt O gaande takken tellen. Zij wordt ten derdenmale gevonden door het aantal snijpunten met elk der drie coördinaatvlakken te zoeken en de som hiervan gelijk te stellen aan $3n$. Voor de drie vlakken gezamenlijk levert volgens *b*) en *c*) van het vorige nummer elke tak p vier $(2 + 1 + 1)$, elke tak q zes

(3 + 2 + 1) en elk punt r twee (1 + 1 + 0) snijpunten op. Hieruit volgt dan weer

$$3\,n = 4\,\Sigma p + 6\,\Sigma q + 2\,\Sigma r,$$

als boven [1].

SLOTSOM : *op S^4 ligt geen ruimtekromme van oneven graad.*

5. DE RUIMTEKROMME R^4(2,2). Deze kromme is de basiskromme van een bundel kwadratische oppervlakken. Iedere lijn van elk der beide stelsels beschrijvende lijnen van ieder dezer oppervlakken is koorde (tweepuntige snijlijn) der kromme. Door een willekeurig gekozen punt der ruimte gaan twee koorden der kromme. Drievoudige koorden (driepuntige snijlijnen) kent ze niet.

Laten we de krommen met een dubbelpunt voorloopig buiten beschouwing, dan hebben we twee gevallen te onderscheiden.

a). *De kromme gaat niet door O.* De eenige onderstelling, die met de verdeeling der snijpunten van de kromme en de coördinaatvlakken over de assen te rijmen is, verlangt, dat elk der assen twee punten der kromme draagt. Uit $r_2 + r_3 = r_3 + r_1 = r_1 + r_2 = 4$ volgt dit onmiddellijk. Omdat de kromme geen drie door O gaande koorden toelaten kan, moet deze onderstelling echter verworpen worden.

---

[1]) Het bewijs door STURM (t. a. p., blz 98) van deze stelling gegeven gaat aan vele gebreken mank. Eerstens is het niet overzichtelijk. Ten tweede hinkt het op twee gedachten; want het maakt gebruik èn van den graad der doorsnee met den projecteerenden kegel èn van het aantal snijpunten met elk der projectievlakken, terwijl de beschouwing van een van beide reeds tot het doel voert. Doch wat meer zegt, het is onjuist. Want bij de telling van de snijpunten met de projectievlakken is onopgemerkt gebleven, dat elke tak q door O voor één der beide door de raaklijn gaande coördinaatvlakken drie snijpunten oplevert. De uitkomst $n = 2\,p_1 + 2\,p_2 + 4\,q_3 + 2\,r_3$, waaruit STURM het belangrijke besluit trekt, moet dan ook wijziging ondergaan. Splitst zich het aantal q_1 der takken, die de X-as aanraken, in q_{12} takken met het XY-vlak en q_{13} takken met het XZ vlak tot kromtevlak en is in cyclische volgorde voortgaande q_2 evenzoo uit q_{23} en q_{21}, q_3 evenzoo uit q_{31} en q_{32} samengesteld, dan geeft telling van het aantal snijpunten met elk der drie coördinaatvlakken de vergelijkingen

$$n = 2\,p_1 + p_2 + p_3 + 3\,q_{23} + 3\,q_{32} + 2\,q_{31} + q_{13} + q_{12} + 2\,q_{21} + r_2 + r_3,$$
$$n = p_1 + 2\,p_2 + p_3 + q_{23} + 2\,q_{32} + 3\,q_{31} + 3\,q_{13} + 2\,q_{12} + q_{21} + r_3 + r_1,$$
$$n = p_1 + p_2 + 2\,p_3 + 2\,q_{23} + q_{32} + q_{31} + 2\,q_{13} + 3\,q_{12} + 3\,q_{21} + r_1 + r_2.$$

Trekken we nu de derde vergelijking af van de som der beide anderen, dan vinden we

$$n = 2\,p_1 + 2\,p_2 + 4\,q_3 + 2\,r_3 + 2\,(q_{13} + q_{23}).$$

Hieruit blijkt dus, dat het verschil juist teweeg gebracht wordt door het buiten beschouwing laten van het kromtevlak in O aan de takken, die daar de assen aanraken.

b). *De kromme gaat door O.* Ook deze onderstelling is onaannemelijk, wijl ze steeds tot een drievoudige koorde door O voert.

Slotsom: *op* S^4 *ligt geen* R^4 (2,2) *zonder dubbelpunt.*

6. De ruimtekromme R^4 (3,1). Door deze kromme gaat slechts een enkel kwadratisch oppervlak. Van de beide op dit oppervlak gelegen stelsels beschrijvende lijnen hebben die van het eene drie punten, die van het andere één punt met de kromme gemeen. Door een willekeurig gekozen punt der ruimte gaan drie koorden, die zich ook tot een drievoudige koorde kunnen vereenigen.

De eenige boven sub 5 *a*) met de verdeeling der punten over de assen bestaanbare onderstelling, nl. dat elke as twee punten der kromme draagt, behoeft hier niet verworpen te worden. Aanstonds zal blijken, dat ze werkelijk tot het doel voert.

Slotsom: *De eenvoudigste ruimtekrommen op* S^4 *zijn krommen* R^4 (3,1).

In het vervolg duiden we de krommen R^4 (2,2) en R^4 (3,1) naar de benaming krommen R^4 van de eerste en tweede soort door R^4_1 en R^4_2 aan.

7. De eenvoudigste handelwijs ter verkrijging van een op S^4 gelegen R^4_2 bestaat hierin, dat we S^4 snijden door een kegel K^4 van den vierden graad, die O tot top en de assen tot dubbelribben heeft. Deze kegel snijdt S^4 volgens een kromme van den zestienden graad met O tot twaalfvoudig punt, waarvan de assen viermaal deel uitmaken. Dus moet de rest een niet door O gaande kromme R^4 zijn. En deze is een R^4_2, wijl ze met elk der assen twee punten gemeen heeft. Immers, uit de beschouwing van de involutie der raakvlakken aan S^4 in de punten van een der assen volgt, dat deze as twee punten P bevat, waar een der beide raakvlakken aan S^4 samenvalt met een der beide bij een verplaatsing van P over de as niet veranderende raakvlakken van K^4 langs deze as. En nu geldt algemeen het volgende beginsel. Eenig oppervlak, dat m-malen door een dubbellijn van S^4 gaat, snijdt S^4 behalve in deze dubbellijn volgens een kromme, die de dubbellijn ontmoet in elk punt, waar een der m raakvlakken aan het oppervlak met een der beide raakvlakken aan S^4 samenvalt.

De kegel K^4 wordt ondubbelzinnig bepaald, als men behalve de drie dubbelribben nog vijf enkelvoudige ribben willekeurig aanneemt. Anders gezegd: door vijf willekeurig op S^4 aangenomen punten gaat steeds een enkele R^4_2. Dus vormen de krommen R^4_2 op S^4 een vijfvoudig oneindig stelsel. Want door middel van alle kegels K^4 met de assen tot dubbelribben vinden we alle niet door O gaande krommen R^4, omdat elk dezer krommen uit O door zulk een kegel ge-

projecteerd wordt. En verder zal blijken, dat de ontaardingen dier kegels de overige op S^4 gelegen krommen van den vierden graad opleveren.

8. Door elk der krommen R^4_2 gaat een enkel kwadratisch oppervlak F^2. Dit bevat het punt O niet en moet S^4 dus snijden volgens een niet door O gaande ruimtekromme van den achtsten graad met twee dubbelpunten op elk der assen. De kromme R^4_2, van welke we uitgingen, maakt deel uit van deze doorsnee; dus is de rest een andere R^4_2, die met de eerste de zes punten op de assen gemeen heeft. Dus worden de krommen R^4_2 en met haar de kegels, die ze uit O projecteeren, door de oppervlakken F^2, die twee dezer krommen bevatten, involutorisch gepaard.

De twee krommen R^4_2, die op een zelfde oppervlak F^2 liggen, hebben samen met elke beschrijvende lijn van dit oppervlak vier punten gemeen, wijl deze lijn vier punten gemeen heeft met S^4. Dus zullen de beschrijvende lijnen van F^2, die drie punten gemeen hebben met de eene kromme R^4_2, één punt gemeen hebben met de andere kromme R^4_2 en omgekeerd. Dit volgt ook uit het aantal gemeenschappelijke punten der beide krommen. Met behulp van het door CHASLES ingevoerde coördinatenstelsel op F^2 (*Comptes rendus*, deel 53, blz. 985) blijkt nl. onmiddellijk, dat twee krommen R^4_2, die zich met betrekking tot elk der beide stellen van beschrijvende lijnen op dezelfde wijs gedragen, slechts zes punten gemeen hebben, terwijl dit aantal tot tien klimt bij twee krommen R^4_2 als de boven gevondene. Werkelijk hebben de twee kegels K^4 buiten de assen om vier ribben gemeen en snijden de beide krommen R^4_2 elkaar dus in zes punten op en in vier punten buiten de assen.

9. In het voorgaande opstel over S^4 (zie blz. 226, n^0. 5) is gevonden, dat de kegels $ayz + bzx + cxy = 0$ en $\frac{yz}{a} + \frac{zx}{b} + \frac{xy}{c} = 0$ op S^4 twee in een zelfde vlak gelegen kegelsneden bepalen. Daar is deze uitkomst verkregen met behulp van de vergelijking van het raakvlak. Hier wenschen we ze langs een anderen weg af te leiden, omdat dit ons onmiddellijk tot een uitbreiding van deze beschouwing op het geval van de involutie der kegels K^4 voeren kan. Deze handelwijs steunt op het in n^0. 7 aangevoerde algemeene beginsel.

Gaat men van een willekeurigen kegel $ayz + bzx + cxy = 0$ uit, die op S^4 de kegelsnee C^2 bepaalt, en wil men nu een anderen kegel zoeken, die op S^4 een met C^2 in hetzelfde vlak liggende kegelsnee C'^2 aanwijst, dan moet men er voor zorgen, dat C'^2 met C^2 de snijpunten met de assen gemeen heeft. In verband met het aangegeven beginsel wordt dit doel bereikt door van den aangeno-

men kegel de raakvlakken α, β, γ langs de assen te bepalen, van deze vlakken α, β, γ de symmetrischen α', β', γ' te nemen telkens met betrekking tot de deelvlakken van de rechte tweevlakkenhoeken der betrokken coördinaatvlakken en nu een kegel te construeeren, die volgens de assen door α', β', γ' wordt aangeraakt [1]). Van de aakvlakken $cz + by = 0$, $ax + cz = 0$, $by + ax = 0$ gaat men dan tot de nieuwe raakvlakken $\frac{z}{c} + \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$, $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 0$ over. Dit doet dan naast $ayz + bzx + cxy = 0$ den kegel $\frac{yz}{a} + \frac{zx}{b} + \frac{xy}{c} = 0$ vinden [1]).

10. Nemen we de vergelijking van K^4 aan in den vorm

$$a^2 y^2 z^2 + b^2 z^2 x^2 + c^2 x^2 y^2 + 2\,xyz\,(bcpx + caqy + abrz) = 0,$$

dan blijkt geheel langs denzelfden weg, dat vervanging van a, b, c door $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ tot de vergelijking van den toegevoegden kegel K'^4 leidt.

Want de raakvlakkenparen langs de assen zijn door

$$b^2 z^2 + 2\,bcpyz + c^2 y^2 = 0,$$
$$c^2 x^2 + 2\,caqzx + a^2 z^2 = 0,$$
$$a^2 y^2 + 2\,abrxy + b^2 x^2 = 0$$

voorgesteld en deze vergelijkingen gaan door de aangegeven substitutie in die der toegevoegde vlakken over [2]). Ten overvloede toonen we dit nog aan door bij den boven gegeven kegel K^4 het door

---

[1]) Het is bekend, dat er in het beschouwde geval werkelijk een kegel is, die aan de zes gestelde voorwaarden voldoet. Heeft men nl. een kegelsnee omschreven aan een driehoek ABC en vervangt men de raaklijnen a, b, c in A, B, C aan deze door de isogonaal verwante lijnen a', b', c' door A, B, C, dan is er een kegelsnee die a', b', c' in A, B, C aanraakt.

[1]) In de door CREMONA gegeven afbeelding (zie de noot bij n^0. 1) komen met twee toegevoegde kegelsneden twee lijnen overeen, die de zijden van den diagonalendriehoek der volledige vierzij harmonisch verdeelen.

[2]) In de afbeelding van CREMONA (zie de noot bij n^0. 1) komen in overeenstemming met het bovenstaande met de beide toegevoegde kromme R^4_2, die bij deze kegels K^4 behooren, een paar kegelsneden overeen, waarvan men de een uit de ander afleidt door de zes snijpunten met de diagonalen der volledige vierzij te vervangen door de met betrekking tot de diagonaalpunten op de diagonalen harmonisch met deze gelegenen.

de overeenkomstige kromme R^4_2 gaande kwadratische oppervlak te bepalen. Dan moet nl. blijken, dat vervanging van a, b, c door $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ deze vergelijking in zich zelf transformeert.

11. We bepalen eerst de op de assen gelegen punten der bij K^4 behoorende R^4_2. Daartoe stellen we de voorwaarde, dat een der beide raakvlakken $x_1(y^2+z^2) - 2kyz = 0$ van S^4 in $(x_1, 0, 0)$ met een der beide raakvlakken $b^2z^2 + c^2y^2 + 2bcpyz = 0$ van K^4 langs de X-as samenvalt. Ter bepaling van x_1 levert dit de betrekking

$$\begin{vmatrix} x_1 & -2k & x_1 & 0 \\ 0 & x_1 & -2k & x_1 \\ b^2 & 2bcp & c^2 & 0 \\ 0 & b^2 & 2bcp & c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

of met weglating der accenten

$$\{(b^2-c^2)^2 + 4b^2c^2p^2\}x^2 + 4(b^2+c^2)bckpx + 4b^2c^2k^2 = 0.$$

Dus is de vergelijking van elk oppervlak F^2, dat met R^4_2 de zes op de assen gelegen punten gemeen heeft,

$$\Sigma[\{(b^2-c^2)^2 + 4b^2c^2p^2\}a^2x^2] + 4abck\,\Sigma[(b^2+c^2)apx] +$$
$$+ 4a^2b^2c^2k^2 + 2\{Pyz + Qzx + Rxy\} = 0,$$

waarin P, Q R, nog onbekende coëfficiënten zijn.

12. De coëfficiënten P, Q, R worden gemakkelijk gevonden met behulp van de in het oneindige gelegen punten van R^4_2, d. i. met behulp van de oneindig ver verwijderde punten der vier ribben, die de kegels K^4 en $y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 = 0$ buiten de assen om met elkaar gemeen hebben. Wijl het gezochte oppervlak F^2 deze vier punten bevatten moet, zullen de vier ribben gelegen moeten zijn op den met den top naar O evenwijdig aan zich zelf verplaatsten asymptotenkegel

$$\Sigma[\{(b^2-c^2)^2 + 4b^2c^2p^2\}a^2x^2] + 2\{Pyz + Qzx + Rxy\} = 0$$

van F^2. Passen we nu de transformatie $xx_1 = yy_1 = zz_1$ toe en laten we daarna de aanwijzers weg, dan staan we dus voor het

vraagstuk door de vier snijpunten der in homogene coördinaten gegeven kegelsneden

$$\varphi_2 \equiv a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2\,(b c p y z + c a q z x + a b r x y) = 0,$$

$$\psi_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

een kromme van den vierden graad met de vergelijking

$$\Sigma\,[\,\{(b^2 - c^2)^2 + 4\,b^2 c^2 p^2\}\,a^2 y^2 z^2] + 2\,x y z\,\{P x + Q y + R z\} = 0$$

te leggen. Zijn nu

$$f_2 \equiv (\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z)^{(2)} = 0 \text{ en } g_2 \equiv (\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z)^{(2)} = 0$$

in symbolischen vorm de vergelijkingen van twee hulpkegelsneden, dan stelt $f_2 \varphi_2 = g_2 \psi_2$ de vergelijking voor van een willekeurige kromme van den vierden graad door de snijpunten van $\varphi_2 = 0$ en $\psi_2 = 0$. Door deze vergelijking overeen te brengen met die van de kromme, waarin de bij F^2 behoorende kegelsnee der oneindig verre punten is overgegaan, vindt men vijftien vergelijkingen ter bepaling van even veel onbekenden, nl. zes grootheden λ, zes grootheden μ en de drie grootheden P, Q, R. Wijl men in de vergelij- $f_2 \varphi_2 = g_2 \varphi_2$ voor f_2 en g_2 meer algemeen $f_2 + h \psi_2$ en $g_2 + h \varphi_2$ stellen kan, moeten deze vergelijkingen zich tot veertien onderling onafhankelijken herleiden. En hoewel dit het geval is, voeren zij, wijl h bij het uitwerken natuurlijk wegvalt, toch tot bepaalde waarden van P, Q, R. Men vindt

$$P = (a^2 - b^2)\;(a^2 - c^2)\,b\,c\,p + 2\,(b^2 + c^2)\,a^2\,b\,c\,q\,r,$$

$$Q = (b^2 - c^2)\;(b^2 - a^2)\,c\,a\,q + 2\,(c^2 + a^2)\,a\,b^2\,c\,r\,p,$$

$$R = (c^2 - a^2)\;(c^2 - b^2)\,a\,b\,r + 2\,(a^2 + b^2)\,a\,b\,c^2\,p\,q.$$

Dus wordt de vergelijking van F^2 ten slotte

$$\Sigma\,[\,\{(b^2 - c^2)^2 + 4\,b^2 c^2 p^2\}\,a^2 x^2] + 4\,a b c k\,\Sigma\,[(b^2 + c^2)\,a p x] + 4\,a^2 b^2 c^2 k^2 +$$
$$+ 2\,\Sigma\,[\,\{(a^2 - b^2)\;(a^2 - c^2)\,p + 2\,(b^2 + c^2)\,a^2 q r\}\,b c y z\,] = 0$$

en deze vergelijking ondergaat werkelijk geen verandering, als men

a, b, c door $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ vervangt en vervolgens met $a^4 b^4 c^4$ vermenigvuldigt.

13. De overige ruimtekrommen van den vierden graad op S^4 gelegen zijn in het gevondene vijfvoudig oneindige stelsel begrepen. Onder deze komen krommen met een dubbelpunt voor. Daarom toonen we eerst aan, dat een zich niet in deelen van lageren graad splitsende ruimtekromme R^4 met een dubbelpunt noodzakelijk een R^4_1 zijn moet.

Is R^4_2 de aanvullingsdoorsnee van twee oppervlakken F^2 en F^3, die de elkaar kruisende lijnen l en m gemeen hebben en elkaar in een niet op l of m gelegen punt P aanraken, dan zal de door P gaande en op l en m rustende lijn n tot F^2 behooren en dus in het raakvlak π van F^2 in P gelegen zijn. Wijl dit vlak tevens raakt aan F^3 in P, zal n dus vier punten met F^3 gemeen hebben, nl. twee in P en één op elk der lijnen l en m. Dus zal n ook op F^3 liggen en derhalve deel uitmaken van de aanvullingsdoorsnee R^4_2. En als we aangenomen hadden, dat P op l of m gelegen was, zou er geen kromme R^4 met een dubbelpunt voor den dag gekomen zijn.

Korter bewijst men hetzelfde aldus. De twee door het dubbelpunt P van R^4 gaande beschrijvende lijnen van een door de kromme gaand oppervlak F^2 liggen met de dubbelpuntsraaklijnen van R^4 in het raakvlak aan F^2 in P en hebben dus elk twee punten met R^4 gemeen; dus is deze kromme een R^4_1.

Wat het geslacht harer projecties betreft, komen de krommen R^4_1 met een dubbelpunt trouwens weer overeen met de krommen R^4_2 zonder dubbelpunt.

Opzettelijk is boven bij de behandeling der kromme R^4_1 het geval van een dubbelpunt voorloopig uitgesloten; wat we omtrent het voorkomen dezer krommen op S^4 wenschen op te merken, zal aanstonds een plaats vinden.

14. Nemen we eerstens een der vijf enkelvoudige ribben, die een tweemaal door de assen gaanden kegel K^4 bepalen, in het YZ-vlak aan, dan splitst deze kegel zich in dat vlak en in een kegel K^3, die de X-as tot dubbelribbe heeft en eenmaal door elk der beide andere assen gaat. Deze kegel K^3 snijdt S^4 volgens een negenmaal door O gaande ruimtekromme van den twaalfden graad, waartoe de X-as viermaal en de andere assen tweemaal behooren. De rest is dus een door O gaande R^4_2, die de X-as tot drievoudige, de andere assen tot enkelvoudige koorden heeft. Even als het stelsel der kegels K^3, is dat der door O gaande krommen R^4_2 viervoudig oneindig; van deze stelsels zijn er drie, een voor elk der assen.

Wijl elk der krommen $R^4{}_2$, behoorende bij de X-as, deze as tot drievoudige koorde heeft, gaat het oppervlak F^2, dat de kromme bevat, door deze as. Dus snijdt het S^4 behalve in $R^4{}_2$ en de tweemaal getelde as nog in een kegelsnee.

Dit alles wordt gemakkelijk stelkundig bevestigd. Stellen we nl. in de vergelijkingen

$$a^2 y^2 z^2 + b^2 z^2 x^2 + c^2 x^2 y^2 + 2 (b c p x + c a q y + a b r z) x y z = 0,$$

$$b^2 c^2 y^2 z^2 + c^2 a^2 z^2 x^2 + a^2 b^2 x^2 y^2 + 2 a b c (a p x + b q y + c r z) x y z = 0$$

der toegevoegde kegels K^4 van het algemeene geval

$$a = 0, \quad q = \infty, \quad r = \infty, \quad a q = q', \quad a r = r',$$

dan gaan ze over in

$$(b^2 z^2 + c^2 y^2) x + 2 (b c p x + c q' y + b r' z) y z = 0,$$

$$b c y z + 2 (b q' y + c r' z) x = 0.$$

Van deze stelt de eerste een K^3 van de beschreven eigenschappen, de tweede een door de assen gaande K^2 voor

Tevens gaat de vergelijking van F^2 over in

$$b c (c^2 y^2 + 2 b c p y z + b^2 z^2) + 2 (b^2 - c^2) (b q' z - c r' y) x +$$
$$+ 4 b c k (c q' y + b r' z) = 0,$$

welke een F^2 door de X-as voorstelt.

15. Nemen we ten tweede in elk der vlakken XY en XZ een der vijf bepalende ribben van K^4 aan, dan splitst deze kegel zich in de vlakken XY en XZ en in een kegel K^2, die door de Y-as en de Z-as gaat. Deze K^2 snijdt S^4 volgens een zesmaal door O gaande kromme van den achtsten graad, waartoe de Y- en de Z-as tweemaal behooren. Dus is de rest een $R^4{}_1$ met een dubbelpunt in O; de dubbelpuntsraaklijnen van O zijn over de vlakken XY en XZ verdeeld. Evenals het aantal der kegels K^2 is dit aantal krommen $R^4{}_1$ drievoudig oneindig. En er zijn weer drie stelsels, bij elk der drie assenparen een.

Wijl de gevonden kromme $R^4{}_1$ de Y-as en de Z-as nog in een

van O verschillend punt snijdt, zal de kegel K^2, die de kromme uit O projecteert, behalve deze met S^4 nog slechts de dubbel getelde Y-as en Z-as gemeen hebben. Dit blijkt ook stelkundig. Door in de algemeene vergelijkingen der toegevoegde kegels K^4 de substituties

$$b = 0,\ c = 0,\ b = e\,c,\ q = \infty,\ r = \infty,\ p = \infty^2,\ c\,q = q',\ c\,r = r',\ b\,c\,p = a\,p'$$

uit te voeren gaan ze over in

$$a\,y\,z + 2\,(p'x + q'y + e\,r'z) = 0,\ \ x = 0$$

terwijl het oppervlak F^2 door R^4_1 dan tevens door de eerste dezer beide vergelijkingen wordt voortgesteld.

We onderzoeken verder, wat de overige oppervlakken F^2 door R^4_1, die geen kegels zijn met O tot top, nog met S^4 gemeen hebben. We doen dit echter alleen meetkundig, wijl het teruggaan tot de vergelijkingen, die ons boven het oppervlak F^2 door R^4_2 geleverd hebben, te veel plaats zou vorderen.

Elk willekeurig oppervlak F^2 door R^4_1 snijdt de Y-as en de Z-as in dezelfde punten, die de kromme met deze assen gemeen heeft en de X-as behalve in O in een veranderlijk punt P. Het heeft met S^4 naast R^4_1 een tweede kromme R^4 gemeen, die ook een R^4_1 moet zijn en dus een dubbelpunt moet vertoonen; dit dubbelpunt is P.

We gaan het geval, dat in elk der drie coördinaatvlakken een der vijf bepalende ribben van K^4 willekeurig aangenomen wordt, met stilzwijgen voorbij, wijl dit voert tot de vlakke doorsneden van S^4 door O.

16. Ten slotte verkrijgen we de zooeven reeds gevondene krommen R^4_1, die buiten O op een der assen een dubbelpunt vertoonen, als de beide raakvlakken langs deze as aan K^4 aangebracht een vlakkenpaar der bij deze as behoorende vlakkeninvolutie van S^4 vormen [1]. In het algemeene vijfvoudig oneindige stelsel der krommen R^4_2 vormen deze krommen R^4_1 gezamenlijk drie viervoudig oneindige stelsels, terwijl de krommen R^4_1 met gegeven dubbelpunt P een drievoudig oneindig stelsel vormen. Want het telt voor één aan K^4 opgelegde voorwaarde, dat de raakvlakken langs een dubbellijn met eenig paar der bij S^4 optredende raakvlakkeninvolutie

[1] Als men de twee raakvlakken van K^4 langs een der assen doet samenvallen en deze as dus tot keerribbe van K^4 maakt, vindt men een R^4_2, die de as aanraakt.

langs deze dubbellijn samenvallen, en voor twee voorwaarden, dat ze dit met een bepaald paar doen [2]).

Elk oppervlak F^2 door een kromme R^4_1, waarvan het op de X-as gelegen punt P het dubbelpunt is, snijdt de Y- en Z-assen in de vaste puntenparen, die R^4_1 met deze assen gemeen heeft, en de X-as behalve in P in een veranderlijk punt Q. Dit oppervlak heeft met S^4 dus nog een tweede kromme R^4_1 gemeen, die de eerste snijdt in de op de Y- en Z-as gelegen punten en in Q een dubbelpunt heeft. Is het oppervlak de kegel met P tot top, dan valt Q met P samen. Gaat in een bijzonder geval de aangenomen kromme R^4_1 door O, alwaar ze dan een in het YZ-vlak gelegen lijn aanraakt, dan levert elk oppervlak F^2 door R^4_1 een tweede kromme R^4_1 op, die in O een dubbelpunt heeft, waarvan de raaklijnen als in het vorige nummer over de vlakken XY en XZ verdeeld zijn.

17. Onder de kegels met een punt P der X-as tot top, die S^4 volgens twee krommen R^4_1 snijden, komt ook de kegel K^2 voor, die omhuld wordt door de door P gaande vlakken, die S^4 elders aanraken [3]). Op dezen vallen de beide krommen van doorsnee in één kromme van aanraking samen. De beschouwing van blz. 227, n°. 7 levert ons spoedig de vergelijking van dezen kegel. Door voor u, v, w de gevonden waarden in te voegen in $xu + yv + zw + 1 = 0$ gaat deze vergelijking van het raakvlak in x Cos. $A + y$ Cos. $B + z$ Cos. $C = k$ over, of, als men de coördinaten van P door $(x_1, 0, 0)$ voorstelt, in $(x - x_1)$ Cos. $A + y$ Cos. $B + z$ Cos. $C = 0$, waarbij dan de voorwaarden x_1 Cos. $A = k$, d.i. A standvastig, en $A + B + C = 180°$ gelden. Dus geeft differentiatie, wijl volgens de laatste voorwaarde $dB + dC = 0$ is, y Sin. $B - z$ Sin. $C = 0$. We hebben dus

$$y \text{ Cos. } B + z \text{ Cos. } C = -(x - x_1) \text{ Cos. } A,$$

$$y \text{ Sin. } B - z \text{ Sin. } C = 0$$

en vinden nu door de vergelijkingen in het kwadraat te brengen en op te tellen $y^2 - 2yz$ Cos. $A + z^2 = (x - x_1)^2$ Cos.$^2 A$,

---

[2]) Deze uitkomst is in strijd met de bewering van STURM, dat *elke* kegel K^2, die een punt der dubbellijnen tot top heeft, S^4 volgens twee krommen R^4_1 snijdt. Deze bewering is echter onjuist.

[3]) Zoo als uit de theorie der poolvlakken onmiddellijk volgt, omhullen de raakvlakken door een willekeurig punt der ruimte een K^6, die door een willekeurig punt van S^4 een K^4 en die door een willekeurig punt van een der dubbellijnen een K^2.

of

$$x_1 (x_1 y^2 - 2 k y z + x_1 z^2) = k^2 (x - x_1)^2,$$

d.i. een kegel K^2, die naar behooren de raakvlakken van S^4 in het punt P tot door de X-as gaande raakvlakken heeft.

18. Men ziet onmiddellijk in, dat de beschouwing, waarin de kegel K^4 met de assen tot dubbelribben een hoofdrol speelt, zich op kegels K^{2n} met de assen tot n-voudige ribben laat uitbreiden. Zulk een kegel toch snijdt S^4 volgens een R^{8n} met O tot $6\,n$-voudig punt, waarvan de assen $2\,n$-maal deel uitmaken. Dus is de aanvullingsdoorsnee een kromme R^{2n}, die in het algemeen niet door O gaat en met elk der assen n punten gemeen heeft; van deze kromme is K^{2n} weer de projecteerende kegel uit O. Wijl het aantal $\frac{1}{6} n (n^2 + 6\,n + 11)$ der punten, die een oppervlak F^n bepalen, steeds grooter is dan het aantal $2\,n^2$ der snijpunten van zulk een oppervlak met de kromme R^{2n}, zal er door deze laatste steeds één en voor $n > 2$ steeds een oneindig aantal van oppervlakken F^n gebracht kunnen worden; elk van deze snijdt S^4 dan in de gevonden kromme R^{2n} en in een andere kromme R^{2n}, die met de eerste de punten op de assen gemeen heeft, enz.

Langs dezen weg kunnen alle op het oppervlak S^4 gelegen ruimtekrommen worden voortgebracht.

— De Heer HOOGEWERFF brengt ter tafel een exemplaar van de dissertatie des Heeren A. R. VAN LINGE: „Ueber die Einwirkung von Kaliumhypobromit in alkalischer Lösung auf Amide" en verzoekt daarvan plaatsing in de boekerij.

— De Secretaris herinnert, dat hij, tengevolge van het bereiken van den 70-jarigen leeftijd, tot de rustende Leden behoort over te gaan, en deelt mede, dat hij door zijn tegen den herfst bepaald vertrek uit de gemeente, tevens zijn Secretariaat der Afdeeling behoort neêr te leggen. Hij doet dit met het oog op de omstandigheid, dat de Leden der Afdeeling in de buitengewone vergadering der maand Maart geroepen zullen worden, een ander lid der Afdeeling in zijne plaats tot Secretaris te benoemen.

De Voorzitter spreekt zijn leedwezen uit, dat de omstandigheden den Secretaris tot aftreden nopen, doch stelt het op prijs, dat hij althans tot het begin der zomervacantie in functie kan blijven.

— De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN.

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 28 Maart 1896.

Voorzitter: de Heer H. G. van de Sande Bakhuyzen.
Secretaris: de Heer C. A. J. A. Oudemans.

Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Een brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (29 Februari 1896), waarin wordt kennis gegeven, dat voor de werkzaamheden der Geologische Commissie opnieuw *f* 500.— beschikbaar zijn gesteld. De Secretaris deelt mede dat hij deze som bereids ontvangen en aan den Secretaris der Commissie heeft ter hand gesteld.

2°. Een brief van den Heer J. H. van 't Hoff (10 Maart 1896), de mededeeling behelzend, dat hij, als Lid der Koninklijke Akademie van Wetenschappen en Hoogleeraar bij de Universiteit te Berlijn, zijne woonplaats binnen kort naar die stad of hare omstreken verleggen zal. Den Secretaris werd opgedragen de tolk te zijn zijner gevoelens van waardeering voor de Afdeeling en van de erkentelijkheid jegens meerdere leden, voor de blijken van vriendschap hem ten deel gevallen.

De Voorzitter herinnert dat de Heer VAN 'T HOFF door zijn vertrek naar het Buitenland ophoudt Gewoon Lid der Akademie te zijn en onder de Correspondeerende Leden zal worden ingeschreven.

3°. Het bericht van het overlijden van Dr. NICOLAAS MATTHEUS KAM, wiens „Catalog von Sternen enz.", door de Afdeeling in Juni 1894 voor hare werken bestemd, slechts voor een deel was afgedrukt, toen eene korte ongesteldheid een einde aan des Schrijvers leven maakte. — De Secretaris deelt mede, dat hij de kennisgeving van het overlijden met een brief van deelneming uit naam der Afdeeling beantwoord heeft.

4°. Uitnoodigingen aan de Afdeeling om zich te doen vertegenwoordigen: 1°. bij de herdenking van het 50-jarig professoraat van Lord KELVIN, Hoogleeraar in de Natuurwetenschappen aan de Universiteit te Glasgow, en dat wel op 15 en 16 Juni e.k.; en 2°. bij een congres, opgeluisterd door eene tentoonstelling, uitgeschreven door het Geologisch Genootschap te Buda-Pesth, bij gelegenheid van de viering van het 1000-jarig bestaan van het Hongaarsche Rijk op 25 en 26 September e.k. Op de eerste uitnoodiging zal, daar geen der leden geneigd is zich naar Glasgow te begeven, geantwoord worden met een brief van gelukwensching. De uitnoodiging van Buda-Pesth zal beantwoord kunnen worden met de mededeeling, dat de Heer MARTIN waarschijnlijk in de gelegenheid zal zijn, als vertegenwoordiger der Afdeeling aan de samenkomst deel te nemen.

5°. Eene missive van Dr. D. ANTONIO DE GORDON Y DE ACOSTA te Havana (21 Februari 1896), waarin hij, naar aanleiding van de toezending van eenige brochures van zijne hand, verzoekt om tot buitenlandsch Lid der Afdeeling benoemd te worden. De Voorzitter herinnert dat het Reglement der Akademie zich tegen dergelijk verlangen verzet en stelt voor den Heer DE GORDON in dien zin te antwoorden. Aldus wordt besloten.

Physiologie. — De Heeren ENGELMANN en PLACE brengen het volgende verslag uit over de verhandeling van den Heer DR. H. J. HAMBURGER *„Over den invloed der intraintestinale drukking op de resorptie in den dunnen darm"*.

De verhandeling van DR. H. J. HAMBURGER, ter beoordeeling in onze handen gesteld, is getiteld „Over den invloed der intraintestinale drukking op de resorptie in den dunnen darm". Zij bevat op 40 blz. in fol. de uitvoerige beschrijving van een onderzoek, waar-

van de voornaamste uitkomsten reeds in de Januari-vergadering door een van ons werden medegedeeld. Wederom, als bij een reeks van vroegere onderzoekingen, door den Heer H. verricht en door de Kon. Akademie gepublieeerd, staat het onderwerp in verband met de prineipieele vraag, óf — en zoo ja op welke wijze — de beweging van vloeistoffen door levende dierlijke membranen aan zuiver physisehe wetten gehoorzaamt. Ditmaal is het de resorptie van vloeistoffen door het levende darmslijmvlies, waaraan deze vraag getoetst wordt.

De sehrijver begint met een geseliedkundig en kritiseh overzieht te geven van de waarnemingen en beschouwingen, tot dusverre door anderen gepublieeerd, waarbij vooral de proeven, door LEUBUSCHER in het laboratorium van HEIDENHAIN verrieht, meer uitvoerig worden behandeld. Deze zag met klimmende intraintestinale drukking de resorptie stijgen, boven een drukking van 80—190 mm. water weder dalen. Hij verklaart het eerste feit uit de vergrooting van het resorbeerende oppervlak, door de uitzetting van den darm veroorzaakt, het tweede uit verlangzaming van den bloedstroom.

Daar de Heer H. de eerste verklaring niet aannemelijk achtte, omdat zij van de absolute grootte der verschillen in resorptiesnelheid volgens hem niet behoorlijk rekenschap kan geven, heeft hij de vergrooting van oppervlak bij klimmende drukking traehten uit te sluiten en wel langs twee wegen: in het eene geval, door een darmlis gedurende de proef in een vaste buis in te sluiten, in het tweede door de lis van buiten te eomprimeeren, door lueht in de buikholte of in den dikken darm of in beide te blazen.

De methodes worden met alle vereisehte nauwkeurigheid besehreven en tal van proeven, volgens beide methoden verrieht, in extenso medegedeeld. Alle proeven zijn op honden genomen. Het in de darmlis ingespoten en onder bekende drukking gehouden ter resorptie aangeboden vocht was steeds eene met hondenbloedplasma isotonisehe keukenzoutoplossing van 0.9 $^0/_0$.

Aan de proeven met variabele drukking gingen controle-proeven met eonstante drukking vooraf. Deze leerden, dat althans binnen de eerste beide uren na 't begin der proef de resorptiesnelheid als nagenoeg eonstant mag beschouwd worden. Later neemt zij af, terwijl, ten minste bij de tweede methode, een bloedhoudend voeht in de buikholte zich ophoopt, kleine bloeduitstortingen onder de darmserosa ontstaan en de darmlis door verslapping der overlangsche spierlaag langer wordt.

Bij wijziging der intraintestinale drukking nam de resorptiesnelheid binnen ruimere grenzen ($^1/_2$—14 em water en meer) met de

drukking belangrijk toe. Hierop werd geen uitzondering gezien, zoo de proeven niet langer dan omstreeks twee uren op dezelfde darmlis werden voortgezet. Ongetwijfeld dus kan ook zonder vergrooting van het resorbeerend oppervlak de resorptiesnelheid door verhooging der intraintestinale drukking belangrijk worden verhoogd.

In de proeven, volgens de tweede methode genomen, werd later, zoodra de beschrevene ziekelijke veranderingen zich merkbaar hadden ontwikkeld, bij lagere drukking meer dan bij hoogere geresorbeerd. De Heer H. verklaart dit feit uit eene allengs met de ziekelijke veranderingen van den vaatwand gepaard gaande grootere permeabiliteit van den vaatwand, die een verhoogde transsudatie in het darmlumen ten gevolge moet hebben, waardoor de resorptie meer of min gecompenseerd wordt.

Ook de snelheid van resorptie bij drukkingen van nul en minder heeft de heer H. nagegaan. Het samenvallen der gebezigde darmlis werd hierbij voorkomen door het inbrengen van een draadtoestel, dat nader beschreven en afgebeeld wordt. De uitkomst was, dat, bij een drukking gelijk nul of minder, geen resorptie merkbaar is. Tegen zijne verwachting, kon de Heer H. bij negatieve drukking verhooging van afscheiding van vocht in 't darmlumen niet waarnemen.

De schrijver vraagt ten slotte, hoe in 't normale leven de volgens hem voor de resorptie noodzakelijke intraintestinale drukking tot stand komt, en wijst op de ademhaling, de peristaltiek en het gewicht der darmen als drie factoren die hierbij een rol spelen. Vergelijkende proeven, gelijktijdig op verschillende darmlissen van 't zelfde dier genomen, waarvan de éene door inschuiven van een draadtoestel aan den invloed dier factoren was onttrokken, de andere niet, leverden uitkomsten in overeenstemming met de verwachting.

De ondergeteekenden adviseeren gaarne tot opneming van de verhandeling in de werken der K. Akademie, al willen zij niet ontkennen, dat zij met de theoretische beschouwingen van den schrijver het niet op alle punten eens zijn en ook meenen, dat de toepassing zijner resultaten op de physiologische resorptie slechts met groote voorzichtigheid en in beperkten omvang zal mogen geschieden, aangezien de inhoud van het darmlumen onder physiologische voorwaarden wel nooit een met bloedplasma isotonische vloeistof is.

Utrecht, } 24 Maart 1896.   Th. W. ENGELMANN.
Amsterdam, }   T. PLACE.

De conclusie van het rapport wordt goedgekeurd.

Natuurkunde. — De heer VAN DER WAALS deelt, namens DR. J. L. HOORWEG te Utrecht, de uitkomst mede van proeven, door hem genomen met de X-stralen.

Reeds dadelijk toen in het begin van Januari RÖNTGEN's ontdekking bekend werd, kwam het mij noodzakelijk voor te onderzoeken, hoe ver men het in die richting brengen kon met gewoon licht. Het scheen mij toe dat eerst daarna een verder onderzoek vruchtbaar kon zijn.

Daarom heb ik gevoelige photographische platen geheel in een ondoorschijnend omhulsel geplaatst en toen blootgesteld aan de stralen van een gewone gasvlam, van het daglicht, van het directe zonlicht en van sterk electrisch booglicht.

Om met zekerheid uit te maken dat de stralen door de ondoorschijnende stof waren heengegaan, plaatste ik op de ondoorschijnende stof stukjes metaal van verschillenden vorm. Zoo deze voorwerpen zich dan op de ontwikkelde plaat afteekenden, waren de stralen door de ondoorschijnende stof heengegaan.

Deze proeven heb ik gedaan met eboniet, hout, karton, aluminium, het zwarte papier der photografen, enz.; in één woord met al die stoffen, die voor de stralen van R. doordringbaar zijn. Van allen bezit ik positieve afdrukken, die boven twijfel stellen dat de stralen er doorheen gingen.

Ik maak daaruit op dat de stralen van R. aanwezig zijn in *alle* lichtbronnen zonder onderscheid, daar toch dezelfde stoffen zich ten opzichte dier stralen geheel gelijksoortig verhouden.

Maar tevens bleek, dat die stralen in gewone lichtbronnen slechts aanwezig zijn in zeer geringe hoeveelheid of van zeer geringe intensiteit zijn. Want deze proeven gelukken alleen bij *geringe dikte* der ondoorschijnende stoffen; wel niet, in zoo geringe dikte dat men er door kan zien, verre van daar; door eene plaat eboniet van $^1/_2$ mM. kan men het felste zonlicht niet zien, evenmin door 2 of 3 lagen zwart papier of door karton van 2 mM. en hout van 3mM. en toch laten deze platen op den duur onzichtbare stralen door, die photographisch werken als de stralen van RÖNTGEN. Maar zoodra de te doordringen laag dikker wordt dan $^1/_2$ cM. of meer, dan geven de onzichtbare stralen der gewone lichtbronnen het op. Zoo kan men met sterk booglicht, na $1^1/_2$ uur poseering, van de menschelijke hand nooit het skelet krijgen; nooit krijgt men anders dan het schaduwbeeld van de vleezige hand zelve, zoo deze op eboniet b. v. ligt. Door het dikke vleesch van de vingers kunnen

de stralen niet heen, evenmin door 25 lagen zwart papier of door een plank van 2 cM. dikte, wat de stralen van R. gemakkelijk doen. Maar dit is geen *qualitatief* onderscheid, dat is een onderscheid in *quantiteit*, want zeer gemakkelijk valt het de stralen van R. zoo te verzwakken, dat zij zich precies gaan gedragen als de bovengenoemde stralen. Men heeft dan maar den afstand van de CROOKE's buis tot de gevoelige plaat te vergrooten. Dit is juist een bezwaar bij het photografeeren van menschelijke lichaamsdeelen: komt men met de CROOKE's buis te dicht bij het lichaamsdeel, dan zijn de omtrekken der beenderen niet scherp, gaat men er te ver van af, dan zijn de stralen te zwak. Ik weet dus geen enkele reden waarom men de door mij bedoelde stralen niet zwakke RÖNTGEN-stralen zou noemen. Maar dan volgt er omgekeerd ook uit dat de X-stralen niet anders zijn dan dezelfde ethergolven, die van iedere lichtbron uitgaan. Er is geen reden hoegenaamd om tot de onderstelling van longitudinale golven over te gaan en zoodoende de geheele theorie van MAXWELL omver te werpen. Neen, ik voor mij geloof eerder, dat de ontdekking van R. eene schitterende bevestiging van de electro-magnetische lichttheorie kan genoemd worden!

Wat toch is het geval?

Het lijdt geen twijfel of de stralen, die LENARD (Wied. Ann. 51) buiten zijn aluminium-venster waarnam, zijn dezelfde stralen als die van R.

LENARD meent wel dat het de kathodestralen zijn, die door het aluminium zijn heengedrongen, maar feitelijk hebben zij volmaakt dezelfde eigenschappen als de stralen van R. Zelfs de later eerst opgemerkte eigenschap der X-stralen, nl. dat zij een electroscoop direct ontladen (THOMSON, RIGHI, HURMUZESCU), wordt reeds door LENARD (S. 240) als eene eigenschap zijner stralen genoemd en toen LENARD het aluminium-venster door een glaswand verving (S. 234), behielden zijne stralen volmaakt dezelfde eigenschappen. Niemand nu zal in het laatste geval ontkennen dat men daar met zuivere X-stralen te doen heeft. De afwijking door magneten is iets van ondergeschikt belang, daar dat een quaestie is van *intensiteit*.

Zoo nu de stralen van R. en die van LENARD dezelfde zijn, dan moeten het golven zijn van buitengewone kleinheid, want zelfs de gewone lucht en het zuivere waterstofgas zijn *troebel* voor die stralen. Men kan het met een fluoresceerend scherm nagaan, dat de stralen van R. zich ook in dat opzicht als die van L. gedragen, nl. juist als de lichtstralen in eene troebele vloeistof. Deze golven zijn dus zoo klein dat zij door de luchtmoleculen gehinderd worden

in hunnen rechtlijnigen voortgang. Men kan dus gerust aannemen dat de *X-stralen gewone ethergolven zijn, maar van buitengewone kleinheid.* Voor dergelijke kleine golven geven de gewone dispersie-formules, als b. v.:

$$n = a + b\,T + c\,T^2 + \frac{d}{T} + \frac{e}{T^2}$$

een oneindig grooten brekingsindex, wat strijdt met de proeven van R.

Maar de formule van Helmholtz, afgeleid uit de electromagnetische lichttheorie, geeft voor dergelijke kleine golven juist een brekingsindex, die tot de eenheid nadert.

Wat men hield voor de meest raadselachtige eigenschap der X-stralen, had Helmholtz uit zijne dispersie-formule kunnen voorspellen.

Zijne formule is: (Wissensch. Abh. Bd. 3, S. 514).

$$\frac{C_0}{C} = \sqrt{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_0}} \times \cos \tfrac{1}{2}\,(\theta_1 - \theta_0)$$

en voor $\lambda = 0$, d. i. voor $n = \omega$, wordt sin. θ_1 = sin. θ_0 en cos. $\frac{1}{2}\,(\theta_1 - \theta_0) = 1$ derhalve $C = C_0$ en de voortplantingssnelheid van deze golven is in alle stoffen even groot als in het luchtledige.

Verder is de uitdoovingscoefficient, q, (l. c. S. 515)

$$q = \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\,(\theta_1 - \theta_0)$$

en derhalve voor $\lambda = o$ of $n = \omega$ *zeer klein*, d. w. z. deze kleine golven gaan gemakkelijk heen door allerlei soort van stoffen, die de gewone golven tegenhouden. Hierdoor is dan de tweede voorname eigenschap der X-stralen verklaard [1]).

---

[1]) Wat het feit betreft, dat de X-stralen niet op spiegels worden teruggekaatst, dat moet, naar de mededeelingen in de *Comptes Rendus* van 2 en 9 Maart, in zoover gewijzigd worden, dat er wel terugkaatsing geschiedt, maar alleen op diffuse wijze.

Nu is de regelmatige terugkaatsing alleen een gevolg van de gladheid der oppervlakte en deze is betrekkelijk. Wat glad is voor gewone lichtgolven, is nog ruw voor de zeer kleine golven, die hier optreden. Men kan dus bij de X-stralen alleen bij buitengewoon gladde oppervlakken eenige spiegelende terugkaatsing verwachten. (Joly in *Nature*, Febr. 10).

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS deelt, naar aanleiding van de mededeeling van DR. J. L. HOORWEG, eenige opmerkingen mede, meer bijzonder *over de wijze van uitstraling der X-stralen.*

Spreker voor zich, al ontkent hij in geenen deele het belang van de waarnemingen van DR. HOORWEG, is niet overtuigd, dat door diens proeven de identiteit is aangetoond van deze stralen met gewoon licht. Eigenlijk toch toonen zij alleen aan dat platen, die voor het oog ondoorschijnend zijn, dit niet zijn ten opzichte van een gevoelige plaat. De onderste grens van gevoeligheid is zeer zeker in deze beide gevallen niet gelijk — terwijl bij een gevoelige plaat de lange duur der expositie een cumulatieve werking uitoefent. Wat voor het bewijs der identiteit ontbreekt is het aantoonen, dat deze door gewone lichtbronnen uitgezonden stralen, die in afgesloten ruimten nog fotografische werking uitoefenen, alle andere bekende eigenschappen met X-stralen gemeen hebben.

Wat de wijze van uitstraling betreft, is de spreker tot de meening gekomen, dat deze in hoofdzaak met die van gewoon licht overeenkomt, en dat de diffusie van stralenbundels, die bijv. bij kathodenstralen die zich in lucht voortbewegen, is waargenomen, bij deze X-stralen niet op merkbare wijze plaats grijpt.

Om daarover zekerheid te verkrijgen, is een klein uitstralend vlakje genomen, eenigermate beantwoordend aan wat bij lichtstralen een lichtpunt zou genoemd worden. Door een magneet werd een zwak convergeerende bundel kathodenstralen tegen den wand van een buis gebogen, die geheel door lood was ingesloten. Een kleine opening ter plaatse, waar de bundel den wand trof, diende tot uitstralingspunt. Een looden scherm, waarin zich een spleet evenwijdig aan de as van de buis bevond, beschermde de gevoelige plaat. De afteekening dezer spleet, hetzij de plaat onmiddellijk achter het scherm, of op grooten afstand er van geplaatst was, was in hoofdzaak gelijk aan die, welke met gewoon licht zou verkregen zijn. Alleen bleek door het uitstralend deel van den wand in normale richting meer te zijn uitgezonden dan in andere richtingen.

Dat de uitstraling in hoofdzaak overeenstemt met die van gewoon licht, bleek nog op verrassende wijze bij een buis, waarin zich in den bodem twee anoden bevonden. Deze door kathodenstralen getroffen bodem gedroeg zich geheel alsof slechts twee kleine uitstralingsvlakjes aanwezig waren. Denkt men zich den cirkelvormigen bodem in vier kwadranten gedeeld, dan vormden de middens der

overstaande kwadranten, die geen anode doorlieten, de twee uitstralingspunten. Alle afteekeningen, met deze buis verkregen, vertoonen dezelfde verschijnselen, die bij licht met twee lichtpunten zouden verkregen zijn. Bijv. een draad, loodrecht geplaatst op de lijn die de twee uitstralingspunten vereenigt, gaf op de gevoelige plaat twee draden te zien — en uit de verschillende bijzonderheden der teekening kon tot de plaats en den afstand der twee uitstralingscentra besloten worden, door van de gewone rechtlijnige voortplanting der stralen uit te gaan.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES vertoont eene serie van buitengewoon scherpe en duidelijke photographieën, onder den invloed der RÖNTGEN-stralen verkregen door den Hoogleeraar H. HAGA te Groningen. Die invloed duurde niet langer dan 1 of $^1/_2$ minuut. Het blijkt dat de practische toepassing van de nieuwe stralen zich meer en meer zal uitbreiden.

Photographieën met de RÖNTGEN-stralen, vervaardigd door den Heer Dr. KUENEN, zullen in de April-vergadering vertoond worden.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Dr. L. H. SIERTSEMA voor het Zittingsverslag eene mededeeling aan: „*Metingen van de magnetische draaiingsdispersie in gassen*".

De waarnemingen met de in de vorige mededeelingen [1]) beschreven toestel zijn voortgezet, en de magnetische draaiingsdispersie is gemeten in stikstof, koolzuur en stikstofoxydule.

Aan de inrichting der toestellen en de waarnemingsmethode werden geene veranderingen van beteekenis meer aangebracht. Ter verduidelijking van de vroeger gegeven beschrijving zijn hierbij eenige afbeeldingen gevoegd van den geheelen toestel en van eenige onderdeelen.

Op de bijgevoegde plaat geeft Fig. 1 eene schematische voorstelling van den geheelen toestel, van boven af gezien. Hierin zijn *A* de collimator, *B* de kleine nicolhouder, *C* en *D* de beide draadklossen [2]), *E* de groote nicolhouder, *F* het prisma met den kijker,

[1]) Zittingsversl. Kon. Akad. 1893/94 p. 31; 1894/95 p. 230.

[2]) 〃 〃 〃 1893/94 p. 34.

*

waarmee het spectraal ontlede licht wordt waargenomen. Voor het instellen van den kleinen nicol dienen de schroef G en de staaldraad $H\,H$[1]). Fig. 4 stelt den arm voor waaraan de draad is bevestigd, gezien van af de zijde van den collimator. Bij J (fig. 1) hangt aan den draad een gewicht. De spiegelaflezing, waarmee de draaiing van den nicol wordt gemeten, bestaat uit den kijker K, de vertikale glazen schaal L, en de spiegels M en N.

Fig. 2 stelt den grooten nicolhouder[2]) voor op grooter schaal. De bovenste helft van de figuur is in doorsnee geteekend, de onderste in aanzicht. Hierin zijn a de nicol, welke gevat is in den ring met stelschroefjes b, c de glasplaat in de flens, d de sluitmoer voor deze glasplaat. De pakkingen zijn hier en op andere plaatsen zwart aangegeven. Het gas kan in den toestel worden gebracht door een aan het moertje e verbonden buis, waaraan tevens de manometer is verbonden. f is de proefbuis, welke door den moer g met den nicolhouder is verbonden, h is de doorsnee van het niveau[3]) op den grooten nicolhouder, i zijn de buizen waardoor water stroomt om de temperatuur van de proefbuis constant te houden[4]), k de toevoerbuis hiervoor met den thermometer l. Een dergelijke buis met thermometer dient voor den waterafvoer. In fig. 1 zijn beide buizen zichtbaar. Tusschen de proefbuis en de waterleidingsbuizen is nog eene laag caoutchouk.

Fig. 3 stelt den kleinen nicolhouder voor, op dezelfde wijze geteekend als fig. 2. De letters a—d, f, g, i hebben dezelfde beteekenis als in de vorige figuur; e is de arm waaraan de staaldraad is bevestigd (zie ook fig. 4).

De bepaling der golflengte geschiedde nu steeds door calibratie van het spectrum met behulp van FRAUNHOFERsche lijnen.

De gassen zijn afgetapt uit stalen en ijzeren bussen, waarin ze in den handel worden gebracht, en zijn geanalyseerd met HEMPEL'sche pipetten.

Voor koolzuur en stikstofoxydule kon de drukking niet zeer hoog worden genomen. In de nabijheid van het condensatiepunt bleek het lichtbeeld veel te onrustig te worden, om behoorlijke waarnemingen mogelijk te doen zijn, ten gevolge van de groote veranderlijkheid van de dichtheid met de temperatuur. Ook was het hierbij

---

[1]) Zittingsversl. Kon. Akad. 1894/95 p. 231.

[2]) 〃 〃 〃 1893/94 p. 33.

[3]) 〃 〃 〃 1894/95 p. 231.

[4]) 〃 〃 〃 1894/95 p. 230.

noodig, wegens het temperatuursverschil van de lucht en de waterleiding, de buiten den toestel uitstekende einden van de proefbuis en de nicolhouders in watten in te pakken.

Het bleek later dat bij deze geringe drukkingen de manometeraflezingen geene voldoende nauwkeurigheid bezitten. De metingen zullen later worden herhaald met betere drukbepalingen; de nu verkregen uitkomsten voor deze stoffen moeten dus slechts als voorloopige worden beschouwd.

Ter beoordeeling van de waarnemingsmethode en de wijze van berekening zullen deze hier wat uitvoeriger worden toegelicht.

De draaiingsbepalingen zijn telkens samengevoegd tot reeksen van vier instellingen. Vóór elke reeks werd de richting van den lichtbundel nagezien, en, zoo noodig, verbeterd. Dan werd de kijker gericht op dat punt van het spectrum, waarin men eene bepaling wenscht te doen, en de stand op een verdeelden cirkel afgelezen. Vervolgens werden afgelezen de manometer, de thermometers welke de temperatuur van het gas aangeven, die van den galvanometer en van den shunt. Dan volgen vier instellingen met stroomrichtingen, welke door (+ — — +) zijn aan te duiden, welke instellingen hierin bestaan, dat de zwarte band in het spectrum, die reeds te voren door draaiing van den nicol dicht bij den juisten stand is gebracht, nu door eene verdere draaiing juist op den vertikalen kijkerdraad wordt geplaatst, waarna onmiddellijk de galvanometer wordt afgelezen en de stroom geopend. Daarop volgen aflezingen van het nulpunt van den galvanometer, van den stand van den nicol, en van de beide einden van de bel van het niveau. Na zulk eene reeks van vier instellingen worden weer de manometer en de thermometers afgelezen, en daarop overgegaan tot eene andere reeks bij eene andere golflengte.

Bij het begin en bij het einde der waarnemingen werden gewoonlijk bepalingen gedaan van den reductiefactor [1]) van den galvanometer en eene bepaling van den afstand van den spiegel, die voor de meting van de draaiing van den nicol dient.

Voor de berekening werden eerst aan de vier spiegelaflezingen, welke den stand van den nicol bepalen, de correcties aangebracht om getallen te verkrijgen, welke evenredig zijn aan de draaiingen, en verder de correcties voor de door het niveau aangegeven draaiing van den grooten nicol [2]). Noemen we de zoo verkregen getallen

---

[1]) Zittingsversl. Kon. Akad. 1894/95 p. 232.

[2]) 〃 〃 〃 〃 〃 231.

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, de bijbehoorende galvanometeruitslagen a_1, a_2, a_3, a_4, dan is gemakkelijk in te zien dat de beide grootheden $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{a_1 + a_2}$ en $\frac{\varphi_4 - \varphi_3}{a_3 + a_4}$ aan elkaar gelijk moeten zijn, en evenredig aan de draaiingsconstante voor de drukking, temperatuur en golflengte van de waarnemingsreeks.

Deze beide grootheden werden daarom berekend, en indien ze meer dan 2 pCt. verschilden, wat niet dikwijls voorkwam, werd de reeks verworpen. Gewoonlijk verschilden ze minder dan 1 pCt. en werd van beide het gemiddelde genomen, de reductiefactor en de dichtheid van het gas berekend, met inachtneming van de afwijkingen van de wetten van BOYLE en GAY-LUSSAC, en verder met behulp van een uit de afmetingen van den toestel afgeleiden voorloopigen herleidingsfactor ten slotte draaiingen berekend in minuten per eenheid van lengte en magnetische kracht, en voor eene drukking van 100 KG. per cM^2.

Op deze wijze zijn nu de volgende cijfers verkregen. In de eerste plaats zijn hierbij nog weer de waarnemingen met lucht en met zuurstof vermeld, welke opnieuw zijn berekend wegens eene juistere bepaling van vroeger slechts voorloopig vastgestelde grootheden.

De golflengten λ zijn uitgedrukt in $\frac{1}{1000}$ mM., de draaiingen n in minuten.

Lucht, (100 KG., $t = 7°.0$). Bij de waarnemingen bedroeg de drukking 91.5 KG.

λ	$n.10^6$	λ	$n.10^6$	λ	n
0.678	441	0.519	731	0.445	994
627	508	500	787	434	1038
583	587	477	857	423	1103
549	658	460	924		

Zuurstof, (100 KG., $t = 7°.0$). Bijmengselen 1.4 pCt., waarschijnlijk stikstof. Waargenomen bij eene drukking van 88.5 tot 97.8 KG.

λ	$n.10^6$	λ	$n.10^6$	λ	$n.10^6$	λ	$n.10^6$
0.684	484	0.604	547	0.507	696	0.450	818
667	484	603	542	506	690	446	838
666	485	578	590	505	690	445	840
664	483	578	582	503	698	439	870
660	493	578	580	477	755	433	875
630	515	578	577	477	756	423	922
630	512	578	577	477	760	423	918
630	515	549	624	477	757	423	922
630	516	539	635	460	797	423	926
606	543	538	635	460	803		
604	545	527	653	456	818		

Stikstof, (100 KG., $t = 14°.0$). Samenstelling: N 93.95 pCt., O 4.80 pCt., CO_2 1.25 pCt. De drukking bedroeg gedurende de waarnemingen van 90.0 tot 109.2 KG.

λ	$n.10^6$	λ	$n.10^6$	λ	$n.10^6$	λ	$n.10^6$
0.656	448	0.583	585	0.517	728	0.431	1069
656	444	554	626	517	723	431	1068
656	440	554	619	486	836	431	1072
643	486	554	624	486	833	423	1102
620	488	543	667	486	821	423	1115
619	496	527	702	477	849	423	1085
619	497	527	705	456	938	423	1110
589	563	527	695	455	950		
589	557	518	732	454	944		
589	554	517	731	436	1033		

Van de uitkomsten voor dicht bij elkaar gelegen golflengten werden de gemiddelden genomen, en hiermede interpolatieformules berekend van den vroeger aangegeven vorm, waarbij aan elk getal een gewicht p werd toegekend gelijk aan het aantal reeksen, waar-

uit het is afgeleid. Tevens zullen de uit deze formules berekende draaiingen worden vergeleken met de waargenomene.

Lucht, (100 KG., 7°.0)

$$n.10^6 = \frac{200.2}{\lambda} + \frac{47.68}{\lambda^3} = \frac{200.2}{\lambda}\left(1 + \frac{0.238}{\lambda^2}\right)$$

λ	$n.10^6$ berekend	$n.10^6$ waargen.	verschil
0.678	448	441	7
627	513	508	5
583	584	587	—3
549	653	658	—5
519	727	731	—4
500	782	787	—5
477	859	857	2
460	925	924	1
445	991	994	—3
434	1044	1038	6
423	1103	1103	0

Zuurstof, (100 KG., 7°.0)

$$n.10^6 = \frac{274.5}{\lambda} + \frac{20.04}{\lambda^3} = \frac{274.5}{\lambda}\left(1 + \frac{0.0730}{\lambda^2}\right)$$

λ	p	$n.10^6$ berekend	$n.10^6$ waargen.	verschil
0.684	1	464	484	—20
664	4	482	486	— 4
630	4	516	514	2
604	4	545	544	1

λ	p	$n.10^1$ berekend	$n.10^6$ waargen.	verschil
578	5	579	581	— 2
549	1	621	624	— 3
5385	2	638	635	3
527	1	658	653	5
505	4	699	693	6
477	4	760	757	3
460	2	803	800	3
453	2	821	818	3
4455	2	843	839	4
436	2	871	872	— 1
423	4	914	922	— 8

Brengt men het bijmengsel geheel als stikstof in rekening, dan vindt men voor zuivere zuurstof:

$$n.10^6 = \frac{275.7}{\lambda} + \frac{19.52}{\lambda^3} = \frac{275.7}{\lambda}\left(1 + \frac{0.0708}{\lambda^2}\right).$$

Stikstof, (100 KG., 14°.0)

$$n.10^6 = \frac{177.9}{\lambda} + \frac{52.18}{\lambda^3} = \frac{177.9}{\lambda}\left(1 + \frac{0.293}{\lambda^2}\right)$$

λ	p	$n.10^6$ berekend	$n.10^6$ waargen.	verschil
0.656	3	456	444	12
643	1	473	486	—13
619	3	507	494	13
5875	4	560	565	— 5
554	3	628	623	5

λ	p	$n.10^6$ berekend	$n.10^6$ waargen.	verschil
543	1	654	667	—13
527	3	694	701	— 7
517	4	722	728	— 6
486	3	821	830	— 9
477	1	854	849	5
455	3	945	944	1
432	4	1059	1060	— 1
423	4	1110	1103	7

Voor zuivere stikstof vinden we:

$$n.10^6 = \frac{172.5}{\lambda} + \frac{53.45}{\lambda^3} = \frac{172.5}{\lambda}\left(1 + \frac{0.310}{\lambda^2}\right)$$

Herleidt men de waarnemingen met stikstof tot 7°.0 en berekent men dan de interpolatieformule van lucht uit die van zuurstof en stikstof, dan vindt men:

$$n.10^6 = \frac{198.0}{\lambda} + \frac{47.51}{\lambda^3} = \frac{198.0}{\lambda}\left(1 + \frac{0.240}{\lambda^2}\right)$$

welke formule met de boven gevondene eene voldoende overeenkomst vertoont.

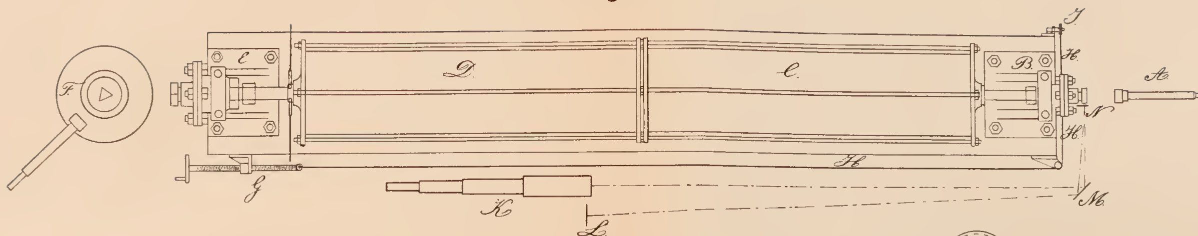
De waarnemingen met koolzuur en met stikstofoxydule leveren de volgende interpolatieformules op:

Koolzuur (1 atm., 6°.5). Druk bij de waarnemingen 18.9—24.7 KG.

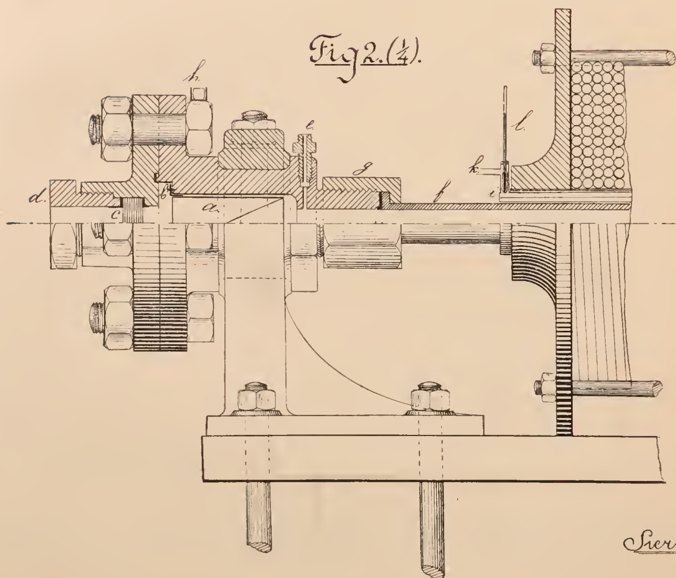
$$n.10^8 = \frac{284.3}{\lambda} + \frac{87.68}{\lambda^3} = \frac{284.3}{\lambda}\left(1 + \frac{0.308}{\lambda^2}\right).$$

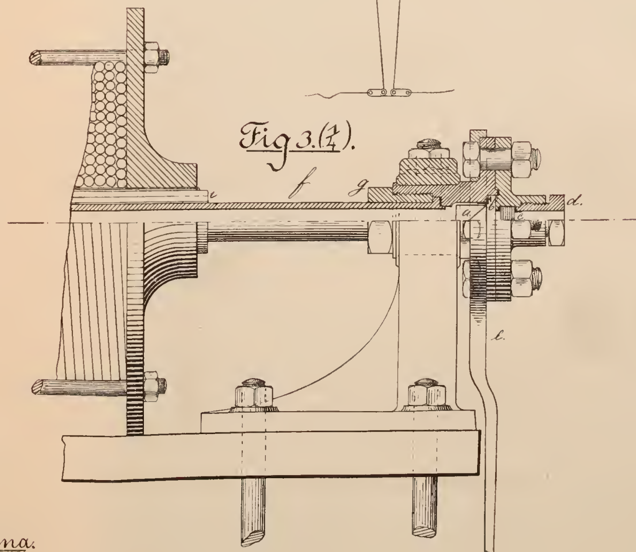
Stikstofoxydule, (1 atm. 0°). Druk bij de waarnemingen 25.0—32.9 KG.

$$n.10^8 = \frac{228.6}{\lambda} + \frac{68.46}{\lambda^3} = \frac{228.6}{\lambda}\left(1 + \frac{0.300}{\lambda^2}\right).$$









Siertsema.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT bespreekt: „*De regels voor de werking van het Salpeterzuur bij de gewone temperatuur op methyleendimethylamiden*".

Spreker toont door voorbeelden aan hoe deze afhangt van de aan de stikstof gebonden zuurrest; hoe sommige zuurresten de werking beletten, terwijl andere eenvoudige nitreering of splitsing en nitreering, wederom andere oxydatie en nitreering teweeg brengen, en vergelijkt een groot aantal zuurresten onderling met betrekking tot hunnen invloed op de besproken werking van het salpeterzuur.

Reeds vroeger was die invloed ook bij enkele piperididen nagegaan en scheen het dat hij dezelfde was als bij de dimethylamiden. Om echter de juistheid der gevonden regels ook in dit geval te toetsen, werd 1°. met Dr. VAN ERP het *oxaalpiperidide* onderzocht en aangetoond dat dit, evenmin als het *oxaaltetramethylamide*, vroeger met den Heer ROUFFAER bestudeerd, door salpeterzuur bij gewone temperatuur wordt aangegrepen. Wel geeft het als amide er eene losse verbinding mede, die bij het verblijven in eene salpeterzuurvrije ruimte voortdurend salpeterzuur verliest.

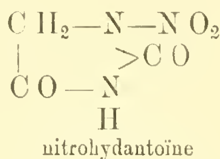
2°. Met Dr. TAVERNE werden drie andere piperididen nagegaan: 1°. het *trichlooracetpiperidide*, dat nog niet bekend was en een goed gekristalliseerde, bij 45° smeltende st f is; dit werd na anderhalf uur intact uit zijne oplossing in salpeterzuur terug verkregen, zoodat het, evenals verwacht werd, weinig of niet werd aangegrepen. Na 24 uren staan der oplossing gelukte dit niet meer, en was er blijkbaar eene oxydatie begonnen; 2°. het *benzolsulfonpiperidide*, dat bijna onmiddellijk nitropiperidine gaf, evenals het benzolsulfondimethylamide nitrodimethylamine levert; 3°. het *picrylpiperidide;* hier bleek opnieuw de gelijke invloed van de carboxalkyl- en picrylgroepen, want er ontstond een fraai rood, gekristalliseerd, bij 195° smeltend lichaam, dat volgens de analyse een picryldehydronitropiperidide schijnt te zijn, analoog aan het nitrodehydropiperylurethaan.

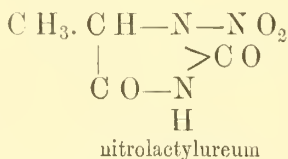
De gevolgtrekkingen, uit de bekende regels afgeleid, zijn dus door deze resultaten bevestigd.

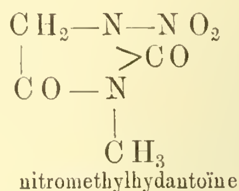
Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT spreekt vervolgens: „*Over de werking van Alkaliën op nitraminederivaten*".

De studie daarvan, door den Heer VAN ERP aangevangen en later door Spreker met dien Heer voortgezet, heeft geleerd dat daarbij salpeterigzuur in groote hoeveelheid gevormd wordt. Bij de vroeger

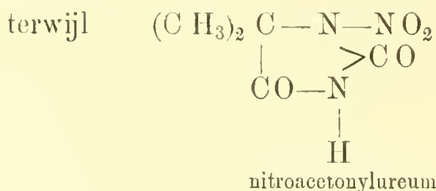
onderzochte nitraminen was steeds verwarming met alkalioplossingen noodig; thans echter is opgemerkt dat er ook zijn die het, en wel bijna onmiddellijk, bij de gewone temperatuur doen. Hiertoe behooren het nitrohydantoïne en twee zijner methylderivaten nl.:







terwijl



het verschijnsel niet vertoont. Hieruit schijnt te volgen dat voor de vorming van het salpeterigzuur een waterstofatoom gebruikt wordt van de koolwaterstofrest, die met de stikstof verbonden is. Het gemakkelijk vormen van salpeterigzuur in de koude met barytwater heeft ook plaats met het nitramino-acetamide, niet daarentegen met aethyleendinitro-ureum, met dinitroglycoluril enz., zoodat de invloed van de groep C O, die aan de koolstof waarvan de waterstof gebruikt wordt staat, noodig schijnt om de werking bij de gewone temperatuur te doen plaats hebben.

Het hier aangegeven feit kan misschien eenig licht werpen op de werking in 't algemeen van oplossingen van alkaliën op neutrale nitraminen. Heeft zij op analoge wijze plaats, dan zouden *iminen*, zooals die welke door HENRY beschreven zijn, moeten ontstaan en deze door waterige oplossingen van alkaliën bij hooger temperatuur geheel of gedeeltelijk in primaire aminen en aldehyden uiteenvallen: de beide producten, die steeds nevens het salpeterigzuur bij de verhitting van neutrale nitraminen met alkalioplossingen zijn gevonden. Daarom werd het *butylmethyleenimine* $C_4 H_9.N = C H_2$, dat nog onbekend was, volgens HENRY's methode bereid en geconstateerd dat het, bij verhitting met alkalioplossingen, butylamine en methanaal levert, terwijl dit laatste gedeeltelijk in mierenzuur wordt omgezet. Dezelfde producten ontstaan uit methylbutylnitramine nevens salpeterigzuur.

— De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN.

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE op Zaterdag 18 April 1896.

Voorzitter: de Heer H. G. van de Sande Bakhuyzen.
Secretaris: de Heer C. A. J. A. Oudemans.

Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Een brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (8 April 1896), waarin wordt meêgedeeld, dat de Heer Dr. D. J. Korteweg, bij Kon. Besluit van 28 Maart 1896 N°. 4, benoemd is tot gedelegeerde der Nederlandsche Regeering bij de Conferentie van het „Committee of the Royal Society" tot samenstelling van een Catalogus van „Scientific Papers", in 1896 te Londen beraamd;

2°. een brief van den Heer Brutel de la Rivière, waarin kennis wordt gegeven dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen;

3°. een brief (3 April 1896) van den Voorzitter der Commissie, waaraan te Kopenhagen was opgedragen eene medaille te doen slaan, ter herinnering aan den 70en verjaardag van den Heer Julius Thomsen, ter begeleiding van een exemplaar van die medaille in brons.

Wordt besloten den Heer JÖRGENSEN den dank der Afdeeling voor dit geschenk te doen toekomen.

Wordt besloten, de circulaire, waarvan in de Maart-zitting kennis werd genomen, en die betrekking had op de herdenking van het 50-jarig professoraat in Juni a.s. van Lord KELVIN, Hoogleeraar in de Natuurwetenschappen te Glasgow, met een brief te beantwoorden, waarvan de redactie, met hun goedvinden, door den Voorzitter opgedragen wordt aan de Heeren VAN DER WAALS en LORENTZ.

— De Heer MARTIN deelt mede dat hij van zijn voornemen om bij de feestvergadering te Buda-Pesth in September e.k. (zie Notulen der Maart-vergadering) de Afdeeling te vertegenwoordigen, heeft afgezien.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt eene verhandeling aan, getiteld: „*Het vierdimensionale prismoïde*" en bespreekt, naar aanleiding daarvan, eene bepaalde eigenschap van het middellichaam, uit beschouwingen van de ruimte met vier dimensiën afgeleid, waarvan daarna een bewijs, onafhankelijk van de vierde afmeting, wordt gegeven.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ spreekt „*over het evenwicht der warmtestraling bij dubbelbrekende lichamen*".

In eene luchtledige ruimte, die aan alle zijden door volkomen zwarte lichamen van eene standvastige temperatuur omringd is, zal een toestand ontstaan, die kan worden opgevat als een stelsel van elkander in alle richtingen doorkruisende warmte- (en misschien licht-)stralen en die onafhankelijk is van de grootte en den vorm der ruimte. Een dergelijken toestand zal men vinden in een ponderabel, diathermaan lichaam *M*, dat een deel der ruimte vult; is er „evenwicht", dan moet er eene bepaalde verhouding bestaan tusschen de hoeveelheden stralingsenergie, die in de volume-eenheid van den aether en in de volume-eenheid van het lichaam aanwezig zijn, m.a.w. tusschen de dichtheden der energie; deze verhouding is, voor het geval dat *M* isotroop is, reeds lang bekend.

De vraag is wat er zal gebeuren zoo men met een dubbelbrekend kristal te doen heeft. De mechanische warmtetheorie vereischt dat in zoodanig lichaam een stralingstoestand ontsta, die aan elk grensvlak, *welke richting dit ook hebbe*, met de straling in den omringenden aether in evenwicht is. Deze uitkomst wordt bevestigd

door de lichttheorie, althans wanneer men aanneemt dat de afmetingen van het liehaam M zeer groot zijn in vergelijking met de golflengte, eene onderstelling trouwens die men wel maken moet om van „stralen" te kunnen spreken en van diffractieverschijnselen te kunnen afzien. Zij heeft tevens ten gevolge dat men de intensiteiten van twee stralen, die zich langs dezelfde lijn voortplanten, bij elkander mag optellen; de reden hiervan komt overeen met die, waarom b. v. dikke glasplaten geene interferentieverschijnselen vertoonen.

In het vervolg zullen wij alleen over de stralen spreken, waarvan de trillingstijd tusschen bepaalde oneindig weinig van elkander verschillende grenzen T en $T + d\,T$ ligt, en over de aan deze stralen beantwoordende energie. De dichtheid daarvan in den aether zal door A worden voorgesteld. Voorts zal, wanneer over een bepaalden straal S of over eene bepaalde groep van stralen met de richting S gesproken wordt, tevens aan eene bepaalde trillingsrichting gedacht worden. In het lichaam M heeft men dus bij elke voortplantingsrichting tweeërlei stralen en ook in den aether is dit het geval, wanneer men bij elken straal S twee zoowel onderling als op den straal loodrechte, doch overigens willekeurige richtingen uitkiest, en alle trillingen die zich volgens S voortplanten volgens die beide richtingen ontbindt. De bij de stralen S behoorende golfnormalen zullen door de letter N, de voortplantingssnelheden der golven door V, en die der stralen door U worden aangewezen. In den aether vallen S en N, en eveneens U en V samen; de voortplantingssnelheid in *dit* medium moge V_0 zijn. Verschillende stralen of groepen van stralen zullen van elkander onderscheiden worden door indices of accenten; deze zullen tevens dienen om de grootheden aan te wijzen, die op de beschouwde stralen betrekking hebben.

Men kan nu, wat den aether betreft, uit het geheele complex van stralen die afzonderen, voor welke de richting binnen een vastgestelden oneindig smallen kegel met de opening $d\,\omega$ valt. De dichtheid der aan deze stralen beantwoordende energie zou, daar alle richtingen in gelijke mate voorkomen,

$$A\,\frac{d\,\omega}{4\,\pi},$$

zijn, wanneer men alle trillingsrichtingen toeliet; wij moeten er echter

$$A\,\frac{d\,\omega}{8\,\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

voor schrijven, daar wij, overeenkomstig de boven gemaakte opmerking, slechts aan ééne trillingsrichting denken.

Op eene dergelijke wijze kan men onder alle stralen in het kristal die uitkiezen, wier richting binnen een oneindig smallen kegel ligt, of liever, want dan wordt eene eenvoudiger uitkomst verkregen, die, voor welke de golfnormaal binnen zulk een kegel $d\omega$ valt. Men kan dan bewijzen dat de toestand stationair is, wanneer de dichtheid der energie, voor zoover zij bij *deze* stralen (met ééne trillingsrichting) behoort, de waarde

$$A \frac{V_0^3}{V^3} \frac{d\omega}{8\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

heeft.

Om het bewijs voor deze stelling te leveren beschouwen wij een zeker deel σ van het grensvlak, zoo klein dat het als plat mag worden beschouwd, en toch zeer groot in vergelijking met de golflengte. Zij S_1 een straal, die zich van σ af, hetzij in den aether, hetzij in het lichaam M, voortplant, en laat S_2, S_3, enz. de stralen zijn, uit welke S_1 door terugkaatsing of breking ontstaan kan.

Zoodra S_1 gekozen is, zijn ook de richtingen van S_2, S_3, enz. bepaald; eveneens die van N_1, N_2, N_3, enz. en de voortplantingssnelheden. Wanneer wij verder aan N_1 achtereenvolgens alle richtingen binnen een oneindig smallen kegel $d\omega_1$ geven, zullen N_2, N_3, enz. bepaalde kegels $d\omega_2$, $d\omega_3$, enz. doorloopen. Wanneer wij in het vervolg van de stralengroepen S_1, S_2, S_3, enz. spreken, zullen wij daarbij al de verschillende richtingen samenvatten, die door de kegels $d\omega_1$, $d\omega_2$, $d\omega_3$, enz. worden toegelaten.

Eindelijk zullen nog zekere volumina ter sprake komen. Wij stellen ons voor dat op σ als grondvlak cilinders geconstrueerd worden, waarvan de eerste de beschrijvende lijnen evenwijdig heeft aan S_1, de tweede aan S_2, enz., terwijl de lengten dezer beschrijvende lijnen evenredig zijn met de voortplantingssnelheden der stralen. Noemt men nu de inhouden dezer cilinders I_1, I_2, I_3, enz., en de hoeken, die de lichtstralen met de normaal op het grensvlak maken, β_1, β_2, β_3, enz., dan is

$$I_1 : I_2 : I_3 : \text{enz.} = U_1 \cos \beta_1 : U_2 \cos \beta_2 : U_3 \cos \beta_3 : \text{enz.} \quad . \quad (3)$$

Men kan nu de intensiteit van S_1 uit die van S_2, S_3, enz. berekenen en wij zullen aantoonen dat men, aannemende dat de intensiteiten van S_2, S_3, enz. door den in (2) uitgedrukten regel bepaald zijn, voor de intensiteit van S_1 op deze wijze eene waarde vindt, die

mede aan dien regel voldoet. Daarmede zal het gestelde klaarblijkelijk bewezen zijn, daar de richting van S_1 geheel willekeurig kan worden gekozen. Het verdient hierbij opmerking dat de uitdrukking (1) als een bijzonder geval van (2) kan beschouwd worden.

Ging het arbeidsvermogen, dat in den stralenbundel S_2 bestaat, geheel in S_1 over, dan zou in de ruimte I_1 de energie komen, die bij de stralen S_2 in de ruimte I_2 bestaat, d.w.z. volgens (2) de energie

$$A \frac{V_0^3}{V_2^3} \frac{d\omega_2}{8\pi} I_2.$$

In werkelijkheid komt echter in I_1 slechts een gedeelte dezer energie, dat wij door de breuk $p_{2\cdot 1}$ zullen aanwijzen. Stelt men op dezelfde wijze de energie voor, die uit de stralen S_3 enz. ontstaat, dan vindt men voor het arbeidsvermogen in de ruimte I_1:

$$\frac{A V_0^3}{8\pi} \left\{ \frac{I_2 \, d\omega_2}{V_2^3} p_{2\cdot 1} + \frac{I_3 \, d\omega_3}{V_3^3} p_{3\cdot 1} + \text{enz.} \ldots \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Zoo aanstonds zal nu bewezen worden, vooreerst dat

$$\frac{I_1 \, d\omega_1}{V_1^3} = \frac{I_2 \, d\omega_2}{V_2^3} = \frac{I_3 \, d\omega_3}{V_3^3} = \text{enz.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

en ten tweede dat

$$p_{2\cdot 1} + p_{3\cdot 1} + \text{enz.} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

is.

Dientengevolge kan men voor (4) schrijven

$$\frac{A V_0^3}{8\pi} \cdot \frac{I_1 \, d\omega_1}{V_1^3}$$

en dat is juist de waarde, die men moest verkrijgen.

Bewijs van (6). Men kan, zooals bekend is, de lichtbeweging omkeeren. Terwijl straks een straal S_1 ontstond uit de stralen S_2, S_3, enz., kan omgekeerd een straal S'_1 die in tegengestelde richting loopt als S_1, gesplitst worden in stralen S'_2, S'_3, enz., die zich in tegengestelde richting voortplanten als S_2, S_3, enz. Stelt men door $p_{1\cdot 2}$, $p_{1\cdot 3}$, enz. de breuken voor, die aangeven, welke gedeelten van het in S'_1 invallende arbeidsvermogen de wegen S'_2, S'_3, enz. inslaan, dan vereischt de wet van 't behoud van arbeidsvermogen dat

$$p_{1\cdot 2} + p_{1\cdot 3} + \text{enz.} \ldots = 1$$

is. Volgens eene bekende stelling heeft men echter

$$p_{1\cdot 2} = p_{2\cdot 1}, \quad p_{1\cdot 3} = p_{3\cdot 1}, \text{ enz } ;$$

men komt daardoor onmiddellijk tot de betrekking (6).

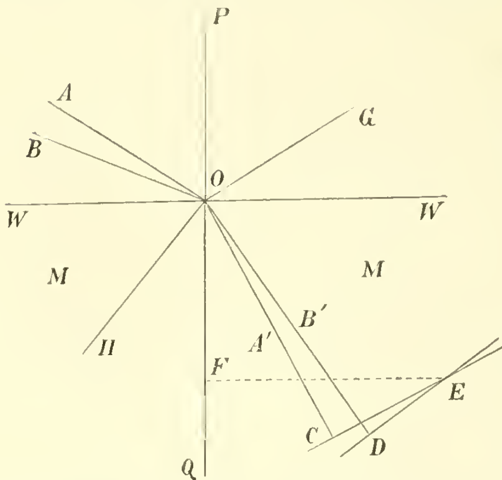
Bewijs van (5). Thans moet nog worden aangetoond dat voor twee willekeurige onder de besproken stralen de betrekking

$$\frac{I\, d\omega}{V^3} = \frac{I'\, d\omega'}{V'^3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

doorgaat.

a. Als de beide stralen in den aether loopen, de een dus een aan de buitenzijde van M invallende straal is, en de ander daaruit door terugkaatsing ontstaat, is de zaak onmiddellijk duidelijk.

b. Wij beschouwen thans een straal die in den aether invalt, en een straal die daaruit door breking ontstaat.



In de nevenstaande figuur, waarvan het vlak met het invalsvlak moge samenvallen, zij WW de doorsnede met het grensvlak, PQ de normaal op dat vlak, AO een invallende straal, OA' de golfnormaal van den daaruit ontstaanden gebroken straal, BO een tweede invallende straal met hetzelfde invalsvlak, die oneindig weinig van AO afwijkt, OB' de daarbij behoorende golfnormaal in het lichaam M.

Zij

$$\angle POA = \alpha, \qquad \angle AOB = d\alpha,$$

$$\angle QOA' = \alpha', \qquad \angle A'OB' = d\alpha'.$$

Men vindt dan gemakkelijk

$$d\omega : d\omega' = \sin \alpha\, d\alpha : \sin \alpha'\, d\alpha' . \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Bij deze beschouwing is in aanmerking genomen dat de golfnormaal in M altijd in het invalsvlak van den in den aether invallenden straal ligt.

Daar in den aether de golfnormaal met den straal samenvalt, geeft de formule (3)

$$I : I' = V \cos \alpha : U' \cos \beta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Om nu de richting van den bij OA' behoorenden straal en de waarde van U' te vinden moet men op verschillende, uit O getrokken, lijnen stukken $= V'$ uitzetten, en door de eindpunten dier stukken vlakken loodrecht op de lijnen brengen. Het omhullende oppervlak van deze vlakken is het golfoppervlak. Dit zal door het vlak, dat op de zooeven genoemde wijze loodrecht op OA' gebracht wordt, in een bepaald punt R worden aangeraakt, dat in de figuur niet is aangewezen, omdat het buiten het vlak daarvan komt te liggen. De lijn OR zal dan de richting van den lichtstraal aangeven, en de lengte van OR zal de waarde van U' bepalen. De laatste term in de evenredigheid (9) zal de projectie van OR op de normaal OQ zijn.

Het is voor ons doel niet noodig, het geheele golfoppervlak te construeeren. Men kan volstaan met *drie* oneindig weinig van elkander afwijkende lijnen, uit O getrokken, b.v. met OA', OB' en eene derde lijn, die niet in het vlak der figuur ligt. De drie vlakken, op de gezegde wijze loodrecht op deze lijnen gebracht, zullen elkander in R snijden.

Zelfs kan men zich tot de twee lijnen OA' en OB' bepalen, daar men niet het punt R zelf, maar alleen de projectie van OR op OQ noodig heeft.

Zij dus in de figuur OC de voortplantingssnelheid V', behoorende bij de golfnormaal OA', OD de voortplantingssnelheid, passende bij OB', $CE \perp OC$, $DE \perp OD$, en EF de loodlijn, uit het snijpunt van CE en DE op OQ neergelaten. Dan zijn CE en DE de doorsneden van het vlak der figuur met de door C en D loodrecht op OA' en OB' gebrachte vlakken. De lijn, volgens welke deze vlakken elkander snijden, staat in E loodrecht op het vlak der figuur, en daar deze lijn het punt R moet bevatten, is OF de gezochte projectie, dus

$$U' \cos \beta' = OF.$$

Voor de golfnormalen geldt de gewone wet van Snellius. Derhalve is

$$OC = V \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}, \quad OD = V \frac{\sin (\alpha' + d\alpha')}{\sin (\alpha + d\alpha)}.$$

en hieruit vindt men door eene eenvoudige meetkundige beschouwing

$$O F = V \frac{\sin^2 a' \cos a}{\sin^2 a} \frac{d a}{d a'}.$$

Substitueert men dit voor den laatsten term in (9) en vermenigvuldigt men dan de evenredigheid met (8), dan komt men tot de vergelijking (7).

c. Dat deze betrekking ook doorgaat, wanneer de eene straal een in *M* invallende is, en de andere de straal in den aether, die daaruit door breking ontstaat, volgt aanstonds uit het onder *b* bewezene. Men heeft slechts in gedachten den loop der stralen om te keeren.

d. Eindelijk kan men met een in het lichaam *M* invallenden straal en een teruggekaatsten straal te doen hebben; de golfnormalen kunnen b.v. *H O* en *O A'* zijn.

Zij *O G* de straal in den aether, die uit *H O* ontstaat, *A O* de straal die tot *O A'* aanleiding kan geven. Uit de wetten der terugkaatsing en breking volgt dan dat *O G* ook door terugkaatsing uit *A O* ontstaan kan.

De in (7) uitgedrukte stelling is nu reeds bewezen voor de stralen *A O* en *O G*, voor de stralen *A O* en *O A'*, en eindelijk ook voor *H O* en *O G*. Daaruit volgt dat zij ook voor *H O* en *O A'* moet gelden.

Dat de uitkomsten der lichttheorie met die der thermodynamica overeenstemmen, is hiermede aangetoond. Wat echter de eigenlijke grond voor deze overeenstemming is, moet nog nader worden onderzocht.

Thans moge nog alleen opgemerkt worden, dat, volgens de in (2) uitgedrukte wet, de straling in het anisotrope lichaam niet in alle richtingen in gelijke mate plaats heeft en bij eene bepaalde richting der golfnormaal trillingen van de beide mogelijke richtingen in verschillende mate voorkomen. De reeds door anderen voor isotrope lichamen verkregen uitkomst is in het hier gevondene als een bijzonder geval begrepen.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt eene mededeeling aan over „*Een hulpmiddel bij het verlichten van schalen voor spiegelaflezing*".

1. In het Natuurkundig Laboratorium te Leiden wordt bij de spiegelaflezingen sedert tal van jaren (1885) eene methode gevolgd, die het gemakkelijk maakt vrij lange verdeelde glazen schalen sterk en gelijkmatig te verlichten met behulp van eene enkele lichtbron van

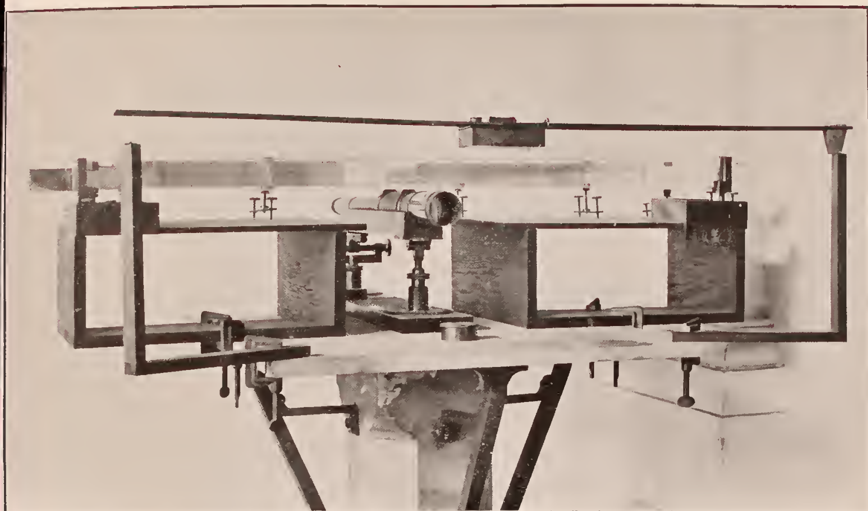


Fig. 1.

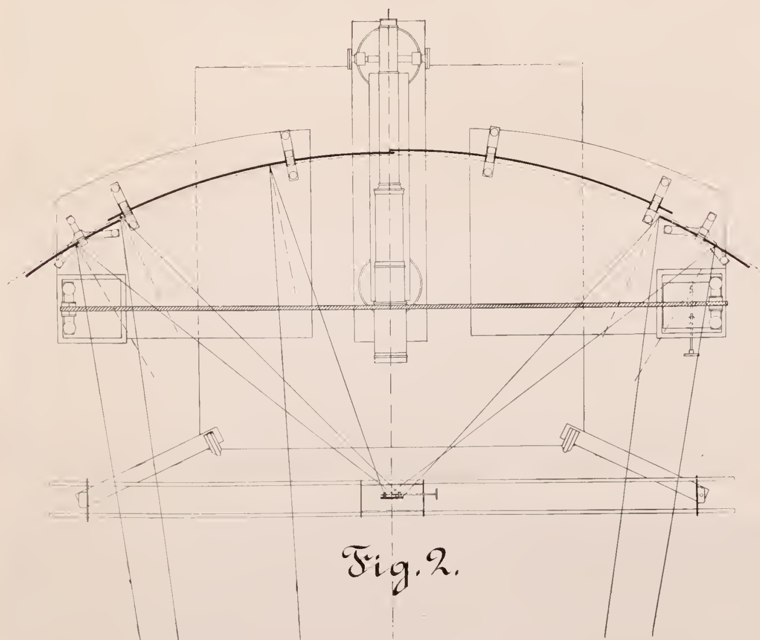


Fig. 2.

geringe afmetingen. Bij de onderzoekingen van SISSINGH, ZEEMAN, WIND, SIERTSEMA en LEBRET o. a., werd de doelmatigheid van deze methode op de proef gesteld. De in fig. 1 afgebeelde inrichting voor spiegelaflezing is die, van welke ik mij sedert eenige jaren bedien voor de galvanometeraflezingen bij de bepaling van lage temperaturen met behulp van een thermo-element.

Ik vond echter tot nog toe niet de gelegenheid mijne methode te beschrijven.

Achter de glazen schaal (zooals die door HARTMANN en BRAUN vervaardigd wordt) zijn uit holle spiegels gesneden reepen opgesteld (zie fig. 1 en 2), die het licht van een boven voor de schaal geplaatste lichtbron weerkaatsen in dier voege, dat door elke spiegelreep een beeld van de lichtbron op den afleesspiegel wordt geworpen. Wanneer men den afleeskijker dan op de schaal instelt, ziet men de verdeelingen donkerzwart op een zeer gelijkmatig en zeer helder verlichten achtergrond. Dat men op dergelijke wijze eene bijzonder fraaie verlichting verkrijgt, is ook door W. H. JULIUS opgemerkt. Op pg. 53 van zijne merkwaardige dissertatie (1888), beschrijft hij hoe hij zijne galvanometer schaal verlichtte door eene petroleumlamp en met behulp van een onmiddellijk achter de schaal geplaatsten gewonen hollen spiegel, en vestigt hij de aandacht op de bijzondere scherpte van aflezing.

Terwijl men bij deze wijze van verlichten niet afhankelijk is van het daglicht, heeft zij anderzijds het voordeel, dat men de schaal in een helder verlicht vertrek met een kijker die 60 maal of zelfs meer vergroot, kan aflezen en men gebruik zou kunnen maken van in kwart millimeters verdeelde schalen, op welke men nog tiende deelen zou kunnen schatten. Gelijk uit fig. 1 blijkt, kunnen daarbij schaal en kijker op de gebruikelijke wijze ten opzichte van elkaar gesteld worden. Ook kan men de lichtbron, zoo dit gewenscht wordt, in de onmiddellijke nabijheid van de afleesinrichting opstellen. Eindelijk behoeft men de warmte, die de lichtbron afgeeft, niet te vreezen, daar de laatste van bijzonder geringen omvang kan zijn.

2. Kon men over willekeurig elliptisch gekromde holle strooken beschikken in plaats van over de zooveel gemakkelijker te verkrijgen sferisch holle reepen [1]), dan zoude de plaats van de lichtbron onverschillig zijn en zoude men de geheele schaal kunnen verlichten met eene lichtbron van slechts uiterst geringe breedte, mits lichtbron
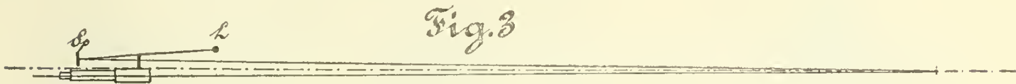
---

[1]) Oorspronkelijk had ik deze reepen uit een gebroken hollen spiegel gesneden, sedert worden zij voor mij opzettelijk vervaardigd door de firma P. J. KIPP & ZONEN, J. W. GILTAY opvolger te Delft.

en afleesspiegel zich in de brandpunten van de ellips bevinden. Met meerdere cirkelvormig gekromde reepen kan men den ellipsboog eenigermate nabootsen. Men brengt daartoe eenvoudig, met iederen spiegelreep, het beeld dat deze van de lichtbron ontwerpt, in de richting van den afleesspiegel en tracht voor iederen spiegelreep op zichzelven te verkrijgen, dat deze, van uit de plaats van den aflees-spiegel gezien, gelijkmatig schitterend verlicht is. Het laatste is voor elk der bolvormige spiegelreepen alleen bij eene zekere breedte van de lichtbron te bereiken. Wil men het verband nagaan van de benoodigde breedte van de lichtbron, den boog dien de enkele spiegelreep onderspant, en de plaats en kromtestraal van dezen spiegelreep, dan behoeft men slechts het volgende in het oog te houden. Een punt der schaal is verlicht wanneer de uiterste stralen, naar den aflezingsspiegel getrokken, rugwaarts verlengd, na terugkaatsing op den verlichtingsspiegel, binnen het lichtgevende oppervlak van de lichtbron vallen en de sterkte van de verlichting is bij bekende straling van de vlam uit de beschouwing van de kegels tusschen deze uiterste stralen af te leiden. Doch ook zonder nadere uitwerking valt het in de eerste plaats in het oog, dat naarmate de lichtbron breeder genomen wordt, het er minder op aankomt of de reep, op eene bepaalde plaats gebracht, den juisten kromtestraal heeft en met de normaal in de juiste richting wijst. Men vindt verder, dat, wanneer de lichtbron niet te smal, en de boog, welke de enkele spiegelreepen onderspannen, niet te groot is, de instelling ook met spiegelreepen, die dezelfde kromming hebben, gemakkelijk te bereiken is en de intensiteit van verlichting voor verschillende punten der schaal dan nagenoeg dezelfde wordt. De kromtestraal van de reepen, te Leiden in gebruik, is ongeveer 96 cM ; de langste reepen onderspannen een boog van 28° en hebben dus eene koorde van 45 cM. Met twee zulke reepen verlicht men, bij een schaalafstand van 3 M. bijv., eene schaal van 80 cM.; met drie, of twee groote en twee kleine, eene schaal van 100 cM., met behulp van een ARGAND-brander.

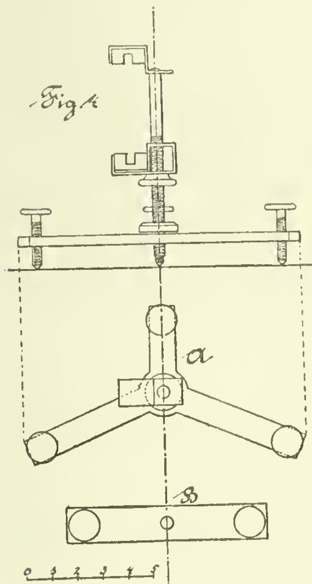
In fig. 2 is, als voorbeeld voor de plaatsing van spiegel, verdeelde schaal en lichtbron geteekend de opstelling van fig. 1, bij welke op een schaal-afstand van 3.^{m}20, eene schaal van 1 Meter met behulp van eene oliepit fraai verlicht werd. Het lampje hangt hier 54.3 cM. van den verlichtingsspiegel en 30 cM. voor de schaal. De loop van eenige lichtstralen is aangegeven. Ter vergelijking is verder de elliptische boog, om lichtbron en aflezingsspiegel als brandpunten, getrokken. De breedte van de vlam is 3,5 cM., de hoogte van het lichtgevend oppervlak van 1,5 tot 2 cM.

3. Gaan wij thans nog enkele details na en bepalen wij ons daarbij tot het geval van spiegelaflezing op eene horizontale schaal [1]).

Het is wenschelijk, de lichtbron boven de schaal op te stellen om te voorkomen, dat deelen van de schaal bedekt of dat de beelden in den kijker, ten gevolge van het opstijgen van warme luchtstroomen, verward worden. De stralenloop zal dus worden als in het schema van fig. 3, en de spiegelreepen moeten iets achter-



overhellend geplaatst worden. Daartoe dienen lichte, stelbare spiegeldragertjes, in welke de spiegels tusschen stukjes kurk opgesloten worden. De constructie der spiegeldragertjes is verder in fig. 4 na te gaan en wel dient fig. 4.*a* wanneer een enkel, fig. 4.*b* wanneer twee spiegeldragertjes een spiegelreep dragen.

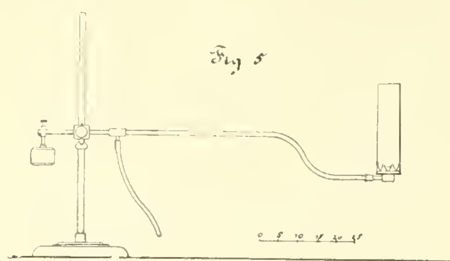


Den vertikalen afstand tusschen kijker, schaal, verlichtingsspiegel en lichtbron (in fig. 3), tracht men zoo klein mogelijk te houden. Ten einde verder te voorkomen, dat hinderlijke spiegelbeelden de gelijkmatige verlichting van den achtergrond verstoren, moeten de spiegels niet te dicht bij de schaal geplaatst worden. Terwijl het eenerzijds niet wenschelijk is zeer lange reepen te nemen, met het oog op de kostbaarheid, op den hellenden stand, die de reepen moeten hebben, en op de aansluiting aan de ellips, is het anderzijds toch aan te bevelen om het aantal reepen voor de verlichting van eene bepaalde schaal zoo gering mogelijk te nemen. Immers, elke overgang van den eenen spiegel tot den anderen brengt eene kleine storing in den gelijkmatigen achtergrond te weeg.

4. Behoeft men warmteuitstraling niet te vreezen, zoo is het

[1]) Ook bij spiegelaflezingen op verticaal gestelde schalen, evenals bij het verlichten van schalen, op welke geene spiegelaflezingen, maar andere instellingen verricht worden, wordt de methode geregeld gevolgd.

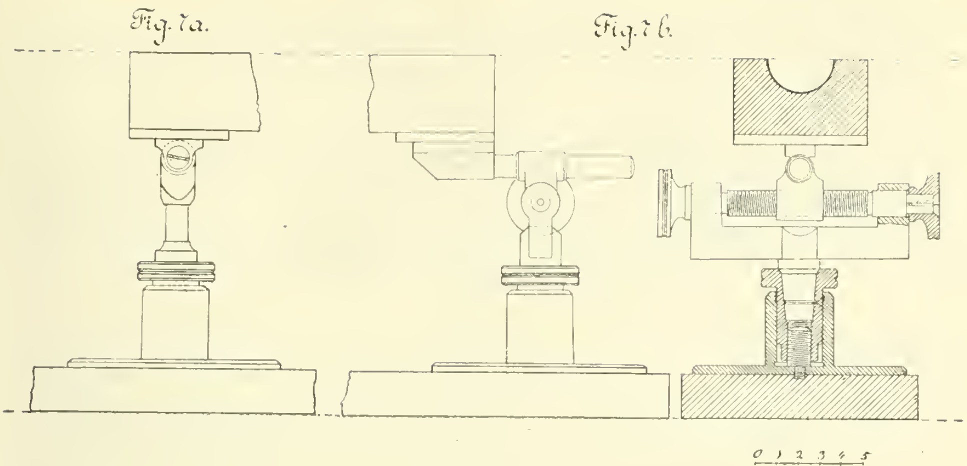
gemakkelijk als lichtbron een ARGAND-brander te gebruiken. Men richt deze dan in met gewijzigden gastoevoer en met een over den afleestoestel heenreikenden arm (zie fig. 5), zoodat het lichtgevende deel van de vlam zoo laag mogelijk boven de schaal komt, terwijl de voet op de afleestafel in de nabijheid van den waarnemer vastgeklemd wordt.



In het geval dat het niet onverschillig is, hoeveel warmte de lichtbronnen afgeven, springt de bijzondere doelmatigheid van het aangegeven hulpmiddel in het oog. Want men kan bij deze methode de onvermijdelijke warmteafgifte tot een minimum beperken, omdat men voor de geheele verlichting slechts een enkel lichtgevend oppervlak van zeer geringe afmetingen noodig heeft. Dit minimum te bereiken kan bijv. bij magnetische waarnemingen in kelders, waar men eene constante temperatuur wenscht te behouden, van groot belang zijn. Gewoonlijk wordt te Leiden, als weinig warmtegevende lichtbron, een olielampje met breede pit op langen bak gebruikt (zie fig. 1). Er was tot nog toe geene aanleiding om hulpmiddelen aan te brengen, teneinde de geringe warmte, die deze lichtbron afgeeft, ook nog weg te nemen [1]). Volgens vriendelijke mededeeling van den Heer HAGA te Groningen, wordt door hem bij de toepassing van de beschreven methode een gloeilampje als lichtbron gebruikt, en levert dit ook bij fijne galvanometrische waarnemingen geen bezwaar op.

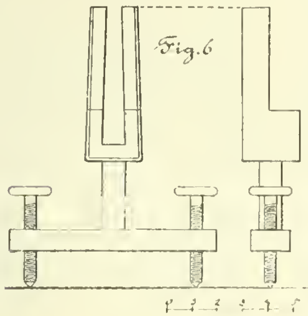
5. Voor het stellen van afleeskijkers, wordt te Leiden gebruik gemaakt van dragers, die ook bij andere proeven dienst doen. De kijker ligt in eene houten lade, rustende op twee koperen stelvoeten (zie fig. 7). De voorste stelvoet (zie fig 7.*a*) geeft gelegenheid tot open neêrwaartsche beweging, tot draaiing om eene vertikale as en tot draaiende beweging om een scharnier met horizontale as. Het zorgvuldig bewerkte scharnier is voor aan de kijkerlade bevestigd. Aan

[1]) Evenmin was er aanleiding om te onderzoeken, welke voordeelen verlichtingsreepen met andere kromtestralen, in verband met andere plaats en vorm van de lichtbron, op grond van de in § 2 aangeduide beschouwingen zouden kunnen opleveren. In alle gevallen van spiegelaflezing, die zich voordeden, kon met de aanwezige hulpmiddelen het doel steeds gemakkelijk bereikt worden.



de achterzijde eindigt de kijkerlade in een koperen staart (zie fig. 7.*b*), die door een blokje schuift, hetwelk door den achtersten stelvoet gedragen wordt, om eene horizontale en verticale as kan draaien en micrometrisch naar beide zijden of op- en nêer kan worden bewogen.

Gebruik makende van zulke kijkerdragers kan men een toestel voor spiegelaflezing gemakkelijk samenstellen. De schaal wordt gevat in twee veerende schaaldragertjes of schaalvoetjes, die aan de binnenzijde met kurk bekleed, en die met schroefbeweging voorzien zijn (zie fig. 6). Verder zijn voor elke gebruikelijke schaallengte houten draagstukken van geschikten vorm (zie fig. 2) vervaardigd, die met den kijkerdrager op een stevig marmeren tafelblad vastgeklemd worden. Op deze draagstukken rusten de spiegeldragertjes met hunne spiegelreepen en de schaal op hare schaalvoetjes. Boven op elk der draagstukken is een bakje aangebracht, waarin een der schaaldragertjes geplaatst wordt en tegen het gevaar van afglijden beveiligd is. De bodem van elk dier bakjes kan met behulp van eene fijne schroef naar voren en achteren verplaatst worden Met behulp hiervan en van de schroefbeweging aan de schaaldragertjes kan de schaal juist gesteld worden.



De in fig. 1 afgebeelde marmeren plaat rust op eene verplaatsbare hardsteenen zuil, die met behulp van geschikte ophoogblokken op den grooten pijler van de zaal, waar de aflezingen geschieden (de magnetische zaal), is geplaatst en daarmede tijdelijk door gips onwrikbaar verbonden wordt.

Aardkunde. — De Heer VAN BEMMELEN biedt, uit naam der Geologische Commissie, een nieuw nummer aan in de serie der stukken, over den bodem van Nederland in het licht gegeven. Het is getiteld: G. REINDERS: „Het voorkomen van gekristalliseerd ferrocarbonaat (siderit) in moeraserts, en eene bijdrage tot het ontstaan van dit erts in den Nederlandschen bodem”. Op verzoek des Voorzitters, verklaren de Heeren VAN BEMMELEN en MARTIN zich bereid, daarover verslag uit te brengen in de Mei-vergadering.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Dr. L. H. SIERTSEMA voor het Zittingsverslag eene mededeeling aan: „*Metingen van de magnetische draaïngsdispersie in gassen*”, verricht in het Natuurkundig laboratorium te Leiden.

Met den in de vorige mededeelingen [1]) beschreven toestel en waarnemingsmethode, is nu de magnetische draaiingsdispersie gemeten in waterstof, wat de volgende resultaten heeft opgeleverd.

Waterstof, (85,0 KG. $t = 9°,5$). Bijmengselen 1,7 pCt., waarbij geen zuurstof, welk bijmengsel wegens zijne geringe dispersie het meest te vreezen is. De drukking waarbij waargenomen is, bedroeg van 77.7 tot 93.7 KG.

λ	$n.10^6$	λ	$n.10^6$	λ	$n.10^6$	λ	$n.10^6$
0.656	370	0.589	472	0.517	606	0.431	806
„	365	0.555	527	0.486	683	„	898
„	362	„	526	„	688	„	900
„	361	„	526	„	695	0.423	921
0.619	414	„	527	„	691	„	938
„	417	0.527	593	0.454	803	„	935
„	408	„	589	„	801	„	939
0.589	468	„	582	„	796		
„	466	0.517	614	0.431	897		
„	460	„	614	„	889		

Berekenen we hieruit eene interpolatieformule op dezelfde wijze

[1]) Zittingsversl. Kon. Akad. 1893/94 p. 31 1894/95 p. 230 1895/96 p. 294.

als voor de andere gassen en vergelijken we deze met de waarnemingen, dan vinden we:

Waterstof, (85.0 KG. $t = 9°.5$).

$$n.10^6 = \frac{140.3}{\lambda} + \frac{45.82}{\lambda^3} = \frac{140.3}{\lambda}\left(1 + \frac{0.326}{\lambda^2}\right)$$

λ	p	$n.10^6$ berekend	$n.10^6$ waargen.	verschil
0.656	4	376	364	12
619	3	412	413	— 1
589	4	462	466	— 4
555	4	521	526	— 5
527	3	579	588	— 9
517	3	603	611	— 8
486	4	688	689	— 1
454	3	799	800	— 1
431	5	898	896	2
423	4	937	933	4

De draaiing is positief, evenals bij de andere gassen.

Natuurkunde. — Twee buitengewoon goed geslaagde photographieën van den Heer Kuenen te Dundee, in de Maartvergadering vermeld, worden ter bezichtiging gesteld.

— Voorts worden voor de boekerij aangeboden: door den Heer W. Kapteyn, uit naam van den Heer J. C. Marx, diens dissertatie: „Over de ontbinding van geheele transcendentale functies in priemfuncties"; en door den Heer Schoute, uit naam van den Heer W. Bouwman, diens dissertatie: „De Plücker'sche grootheden der deviatiekromme", en uit naam van den Heer H. F. Huisken, diens dissertatie: „De doorsnijding eener drieassige ellipsoïde door een vlakkenbundel".

— De vergadering wordt gesloten.

ERRATUM.

Pag. 302, regel 3 v. b. staat: methyleendimethylamiden,
lees: methyl- en dimethylamiden.

REGISTER.